Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет − УПИ»

Р.М. Минькова

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Научный редактор доц. В.Б. Грахов

Печатается по решению
редакционно-издательского совета ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

Екатеринбург
2006

УДК 514. 742 (075.8)
ББК 22.151.5 я73
М 62
Автор Р.М. Минькова

Рецензенты:
кафедра высшей математики Уральского государственного экономического университета (зав. кафедрой проф., канд. физ.-мат. наук Н.И. Чвялева);

проф., д-р физ.-мат. наук В. Б. Репницкий (Уральский государственный университет им. А. М. Горького, кафедра алгебры и дискретной математики)

М 62 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: учебно-методическое пособие по курсу «Высшая математика»/Р.М. Минькова. Екатеринбур: ГОУ ВПО УГТУ−УПИ, 2006. 42 с.

ISBN 5-321-00547-8

Излагается теория по следующим вопросам: определители и системы линейных уравнений второго и третьего порядков, векторная алгебра, аналитическая геометрия, комплексные числа. Приводится решение типовых примеров. Предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов дистанционной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 6 назв. Рис. 73.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы
и уравнения математической физики»
и факультетом дистанционного образования

УДК 514. 742 (075.8
ББК 22.151.5 я73

ISBN-5-321-00547-8

Оглавление

1. Определители второго и третьего порядка

Рассмотрим прямоугольную таблицу чисел, состоящую из k строк и n столбцов, заключенную в круглые скобки

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эту таблицу называют матрицей. Элемент матрицы $a_{i\,j}$ имеет два индекса i и j, где i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых расположен элемент $a_{i\,j}$.

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной. Любой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, вычисляемое по определенным правилам и называемое определителем.

Определитель второго порядка − это число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определитель третьего порядка – это число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Число Δ равно сумме слагаемых, в которых каждый элемент первой строки (знаки этих элементов чередуются, начиная со знака +) умножается на определитель, который получается вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Например,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 4(3 \cdot 1 - 6 \cdot 1) - 2(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 3(-2 \cdot 6 - 1 \cdot 3) = -51.$$

Аналогично вычисляется определитель *n–го* порядка. Определители *n–го* порядка и их свойства мы рассмотрим позже. Для изучения векторной алгебры и аналитической геометрии достаточно уметь вычислять определители лишь второго и третьего порядка.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить определители:

$$а)\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix};\quad в)\ \begin{vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix};\quad г)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix};\quad д)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ответы: *а)* 18, *б)* 0, *в)* 1, *г)* −12, *д)* 29.

2. Векторная алгебра

В различных дисциплинах используются скалярные и векторные величины. Скалярная величина определяется одним числом, например, масса, объем, температура. Векторная величина характеризуется не только числом, но и направлением, например, сила, скорость, ускорение. Отвлекаясь от конкретного содержания, векторная алгебра изучает геометрические векторы и операции над ними.

2.1. Понятие вектора

Понятие вектора, линейные операции над векторами были рассмотрены в школьном курсе математики. Напомним основные моменты.

В математике вектор − это направленный отрезок (рис.1). Обозначают вектор $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$, его длину a, $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

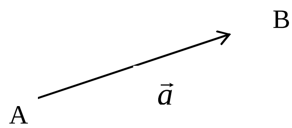


Рис. 1

Если векторы параллельны одной прямой, то они называются ***коллинеарными***. На рис.2 векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ − коллинеарные, при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в одну сторону (сонаправлены), а векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ − в разные стороны. Записывают это так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

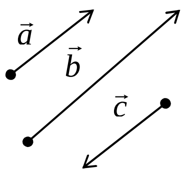


Рис.2

Векторы, параллельные одной плоскости, называются ***компланарными.***

В математике два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковые длины, коллинеарны и одинаково направлены. На рис.3 в параллелограмме ABCD векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ − равны, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, а векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не равны, так как $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$.

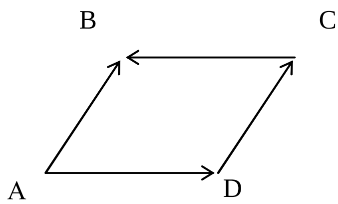


Рис.3

2.2. Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся сложение, вычитание векторов, умножение вектора на число.

Сложение векторов

Для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложим от какой-нибудь точки A (рис.4) вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называют суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это правило сложения двух векторов называют правилом треугольника.

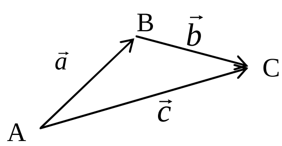


Рис.4

Для сложения двух векторов можно пользоваться также правилом параллелограмма: от какой-нибудь точки A отложить векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и построить параллелограмм ABCD (рис.5). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a} + \vec{b}$.

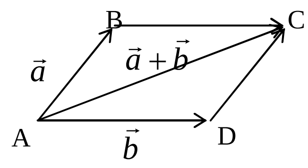


Рис.5

Сложение более двух векторов производится по правилу многоугольника. Например, для сложения четырех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ (рис.6) от произвольной точки A откладываем вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем из точки B откладываем вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, из точки C откладываем $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, из точки D откладываем вектор $\overrightarrow{DK}=\vec{d}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AK}$ (направленный из начала первого вектора к концу последнего) равен $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

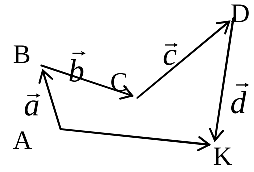


Рис.6

Вычитание векторов

Для построения вектора $\vec{a}-\vec{b}$ из произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ (рис. 7). Тогда вектор разности $\vec{a}-\vec{b}$ есть вектор $\overrightarrow{BA}$, соединяющий концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный к вектору $\vec{a}$.

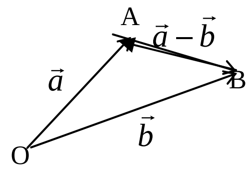


Рис.7

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}$, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, такой, что

$$1)\ \left|\vec{b}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|,\quad 2)\ \vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a},\ \text{если } \lambda\ge 0,\qquad \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a},\ \text{если } \lambda<0.$$

Нетрудно проверить, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует единственное число λ такое, что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$:

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}}\,. \qquad (2.1)$$

Линейные операции над векторами обладают теми же свойствами, что и линейные операции над действительными числами, а значит, можно группировать векторы и раскрывать скобки, как при действии с действительными числами.

2.3. Координаты вектора и точки в заданном базисе

Разложение вектора по базису на плоскости

Базис на плоскости – это ***два неколлинеарных вектора*** $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, взятых в определенном порядке.

Пусть $\vec{a}$ − произвольный вектор на плоскости. Из произвольной точки O отложим векторы, равные $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (рис. 8). Вектор $\overrightarrow{OB}$ коллинеарен вектору $\vec{e}_1$, а вектор $\overrightarrow{OC}$ коллинеарен вектору $\vec{e}_2$. Поэтому найдутся такие числа a_1 и a_2, что $\overrightarrow{OB}=a_1\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OC}=a_2\vec{e}_2$. Тогда

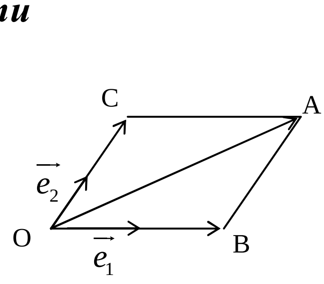


Рис.8

$$\boxed{\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2} \qquad (2.2)$$

Говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, а коэффициенты разложения a_1,a_2 называют ***координатами вектора*** $\vec{a}$ *в базисе* $\vec{e}_1,\vec{e}_2$.

Разложение вектора по базису в пространстве

Базис в пространстве – это ***три некомпланарных вектора*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятых в определенном порядке.

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор. Из произвольной точки O отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 9). Из точки A проведем прямую AB, параллельную вектору $\vec{e}_3$, до пересечения с плоскостью векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. По правилу треугольника $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$. Как показано выше, $\overrightarrow{OB} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ коллинеарен вектору $\vec{e}_3$, поэтому найдется число a_3 такое, что $\overrightarrow{BA} = a_3\vec{e}_3$. Тогда

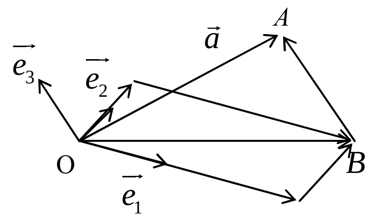


Рис.9

$$\boxed{\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3}\,. \tag{2.3}$$

Вектор $\vec{a}$ разложен по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, причем это разложение единственно; коэффициенты разложения a_1, a_2, a_3 есть ***координаты вектора*** $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Принята запись $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ или $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Свойства координат векторов

1). При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число.
2). При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).
3). Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Проверим третье свойство. Пусть в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты a_1, a_2, a_3, вектор $\vec{b}$ – координаты b_1, b_2, b_3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Используя первое свойство, получим

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3}. \tag{2.4}$$

Это и означает пропорциональность координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если b_1, b_2, b_3 отличны от нуля, то эти соотношения записывают в виде

$$\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Эти же соотношения записывают, если одна из координат вектора $\vec{b}$ равна нулю. Тогда из равенств (2.4) следует, что соответствующая координата вектора $\vec{a}$ тоже равна нулю. Итак,

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}\,. \tag{2.5}$$

Координаты точки. Их связь с координатами вектора

Рассмотрим базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, поместим их в общее начало – фиксированную точку O (начало координат). Через точку O и базисные векторы проведем оси координат ox, oy, oz (рис. 10).

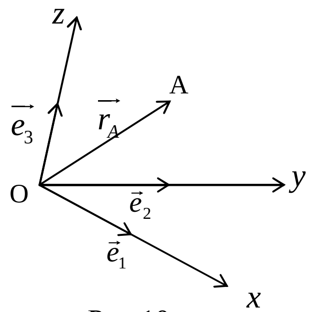


Рис.10

Рассмотрим точку A (рис. 10). Координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ называют − ***координатами точки*** A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ или в системе координат $Oxyz$. Координаты вектора будем писать в фигурных скобках $\overrightarrow{OA} = \{a_1, a_2, a_3\}$, а координаты точки – в круглых скобках $A(a_1, a_2, a_3)$.

Если известны координаты начала $A(a_1, a_2, a_3)$ и конца $B(b_1, b_2, b_3)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то для отыскания координат вектора надо из координат конца вычесть соответствующие координаты начала:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3\}}\,. \tag{2.6}$$

Методами векторной алгебры удобно решать целый ряд геометрических задач. Поясним это на примере задачи деления отрезка в данном отношении.

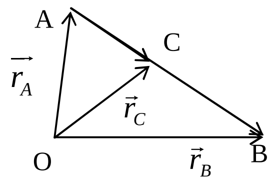


Рис.11

Пусть известны координаты точек $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Требуется найти координаты точки $C(c_1, c_2, c_3)$, делящей отрезок AB в отношении λ (рис.11).

По условию $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \lambda$ или $|\overrightarrow{AC}| = \lambda |\overrightarrow{CB}|$. Кроме того, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ − сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Рассмотрим (рис.11) радиус-векторы $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ точек A, B, C. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$, $\overrightarrow{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C$ и равенство $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$ примет вид: $\vec{r}_C - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_C)$. Из этого соотношения

$$\vec{r}_C - \vec{r}_A = \lambda \vec{r}_B - \lambda \vec{r}_C \quad \text{или} \quad \vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1 + \lambda}.$$

Аналогичными соотношениями связаны и координаты точек A, B, C:

$$\boxed{c_1 = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda}, \quad c_2 = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}, \quad c_3 = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}}. \tag{2.7}$$

Если точка C делит отрезок AB пополам, то $\lambda = 1$ и

$$\boxed{c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.}$$

Пример 2.1. Отрезок, соединяющий точки $A(3,2,1)$ и $B(15,6,-1)$, разделен на пять равных частей (рис. 12). Найти координаты точки C_2.

Решение. Точка $C_2(x,y,z)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{|AC_2|}{|C_2B|} = \dfrac{2}{3}$. Найдем координаты точки C_2 по формулам

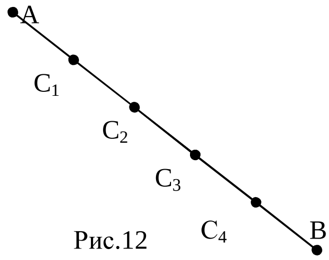


Рис.12

$$x = \frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda} = \frac{3+15\cdot 2/3}{1+2/3} = 7.8, \quad y = \frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda} = 3.6, \quad z = \frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda} = 0,2.$$

Пример 2.2. В трапеции $ABCD$ (рис. 13) известны координаты трех её вершин $A(1,1,-4), B(3,2,-1), C(4,3,4)$. Найти координаты вершины D, если она лежит в плоскости yoz.

Решение. Так как вершина D лежит в плоскости yoz, то её первая координата $x=0$, две другие координаты неизвестны, обозначим их y, z. Итак, точка D имеет координаты $D(0,y,z)$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, вычитая из координат конца координаты начала:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1,\, 2-1, -1+4\} = \{2,1,3\}, \qquad \overrightarrow{DC} = \{4,\, 3-y,\, 4-z\}.$$

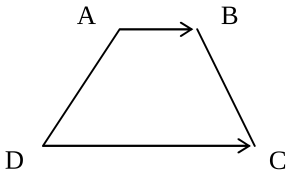


Рис.13

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{4}{2} = \frac{3-y}{1} = \frac{4-z}{3}.$$

Тогда $2 = 3-y, \quad 2 = \dfrac{4-z}{3}$ или $z=-2,\ y=1$ и $D(0,1,-2)$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Проверить, что точки $A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3), \quad D(3,-5,3)$ служат вершинами трапеции.

Указание: проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Пример. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \{1,3,-2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4,2,-2\}$. Найти вектор медианы $\overrightarrow{BM}$. Ответ: $\overrightarrow{BM} = \{1,-2,1\}$.

Пример. Даны точки $A(8,-7,-5), B(-1,5,7)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части. Ответ: $C(5,-3,-1), D(2,1,3)$.

2.4. Проекция вектора на ось

Пусть l − ось, $\vec{c}$ − ненулевой вектор, лежащий на этой оси, $\overrightarrow{AB}$ — ненулевой вектор (рис. 14). Через точки A и B проведем плоскости, перпендикулярные оси l. Точки их пересечения с осью l обозначим соответственно A' и B'. Точки A', B' есть проекции точек A и B на ось l. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{c}$ (или на ось l) определяется следующим образом:

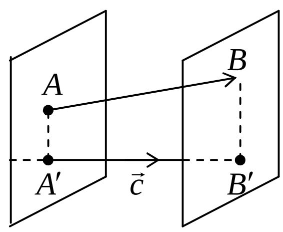


Рис.14

$$\boxed{np_{\vec{c}}\, \overrightarrow{AB} = np_{l}\, \overrightarrow{AB} = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \text{если } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \vec{c} \\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \text{если } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \vec{c} \end{cases}}. \qquad (2.8)$$

Отметим следующие свойства проекции вектора:

1) $np_{\vec{c}}\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi,$ где φ − угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}$;

2) $np_{\vec{c}}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda \cdot np_{\vec{c}}\vec{a} + \mu \cdot np_{\vec{c}}\vec{b}$;

3) если базис – ***ортонормированный*** (то есть базисные векторы единичной длины и взаимно перпендикулярны), то координаты вектора равны проекциям вектора на базисные векторы.

2.5. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения

> ***Скалярным произведением*** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***скаляр***, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \left|\,\vec{b}\,\right| \cdot \cos\varphi .$$

Принято и другое обозначение скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{b})$.

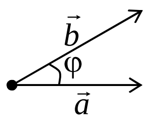


Рис. 15

Отметим, что если $\vec{b} = \vec{a}$, то $\varphi = 0°$ и из определения следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\,\vec{a}\,|^2$. Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначают $\vec{a}^{\,2}$ и называют скалярным квадратом вектора. Итак, $\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2$.

Свойства скалярного произведения

> 1). Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.
> 2). Скалярное произведение векторов перестановочно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$
> 3). Скалярное произведение ненулевых векторов связано с их проекциями:
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,|\, np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\,\vec{b}\,\right| np_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$
> 4). Свойство линейности: $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \mu\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

Докажем первое свойство: для ненулевых векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \left|\,\vec{b}\,\right| \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Доказательство второго свойства основано на том, что углы $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ и $(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$ равны, поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \left|\,\vec{b}\,\right| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \left|\,\vec{b}\,\right| \cdot |\,\vec{a}\,| \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = \vec{b} \cdot \vec{a}.$

Доказательство третьего свойства следует из того, что

$$|\,\vec{a}\,| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = np_{\vec{b}}\vec{a}, \qquad \left|\,\vec{b}\,\right| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \left|\,\vec{b}\,\right| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\,\vec{a}\,|\, np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\,\vec{b}\,\right| np_{\vec{b}}\vec{a}.$

Доказательство четвертого свойства опустим.

Свойства перестановочности и линейности позволяют при скалярном умножении векторов раскрывать скобки по обычным правилам алгебры как при действии с многочленами. Например,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b},$$

то есть для векторов, как и для чисел, справедлива формула

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2. \qquad (2.9)$$

Аналогично (проверьте самостоятельно),

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2. \qquad (2.10)$$

Пример 2.3. Известно, что $|\vec{a}|=\sqrt{2},\ \ |\vec{b}|=3,\ \ (\hat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{3\pi}{4}$. Вычислить $(\vec{a}-3\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

Решение. Используем свойства перестановочности и линейности скалярного произведения:

$$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2.$$

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\hat{\vec{a},\vec{b}})=\sqrt{2}\cdot3\cdot\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-3$, то

$$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=2\cdot2-5\cdot(-3)-3\cdot9=-8.$$

Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе

Рассмотрим ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Пусть $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$. Найдем скалярное произведение этих векторов, используя свойство линейности:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3k)=$$

$$=a_1b_1(\vec{i},\vec{i})+a_1b_2(\vec{i},\vec{j})+a_1b_3(\vec{i},\vec{k})+a_2b_1(\vec{j},\vec{i})+a_2b_2(\vec{j},\vec{j})+a_2b_3(\vec{j},\vec{k})+a_3b_1(\vec{k},\vec{i})+a_3b_2(\vec{k},\vec{j})+a_3b_3(\vec{k},\vec{k}).$$

Так как векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ перпендикулярны и длины их равны единице, то скалярное произведение разных базисных векторов равно нулю, а скалярное произведение одинаковых базисных векторов равно квадрату их длины, то есть единице. Поэтому предыдущее равенство примет вид

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}. \qquad (2.11)$$

Итак, ***скалярное произведение*** двух векторов, заданных в ортонормированном базисе, ***равно сумме произведений их одноименных координат***.

Применение скалярного произведения

1). Проверка перпендикулярности двух ненулевых векторов

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0}.$$

2). Вычисление длины вектора

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{\vec{a}^2}}. \qquad (2.12)$$

Действительно, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$. В частности, в ортонормированном базисе для вектора $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ из формул (2.11) и (2.12) получим

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \qquad (2.13)$$

3). Отыскание угла φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}. \qquad (2.14)$$

Эта формула следует из определения скалярного произведения.

4). Вычисление направляющих косинусов вектора:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}}, \qquad (2.15)$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}. \qquad (2.16)$$

Здесь $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ − углы, которые образует вектор $\vec{a}$ соответственно с базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (или, что то же самое, с осями ox, oy, oz). Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Формулы (2.15) следуют из формул (2.14), например,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{\{a_1, a_2, a_3\}\cdot\{1,0,0\}}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}.$$

Возводя в квадрат и складывая равенства (2.15), учитывая, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$, получим формулы (2.16).

5). Вычисление проекции для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\boxed{np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}}. \qquad (2.17)$$

Эта формула следует из свойства 3) скалярного произведения.

6). Вычисление работы A постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении из точки M в точку N (рис.16).

$$\boxed{A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}}. \qquad (2.18)$$

Действительно, из физики известно, что

$$A = |\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cos(\vec{F}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{MN}), \text{ а значит, } A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}.$$

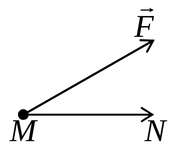


Рис. 16

Пример 2.4. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $A(1,2,0),\ B(-2,1,1),\ D(3,-1,3)$.

Решение. Сделаем схематичный чертеж (рис.17). Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, вычитая из координат концов координаты начала этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{-3,-1,1\},\ \overrightarrow{BD} = \{5,-2,2\},\ \overrightarrow{AD} = \{2,-3,3\}.$$

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \{-1,-4,4\}$.

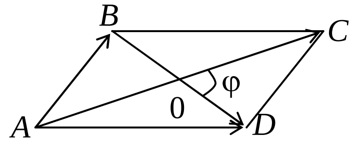


Рис. 17

Искомый угол φ между диагоналями параллелограмма равен углу между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Из формулы (2.14) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-1\cdot 5+(-4)(-2)+4\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{33}} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$, т.е. диагонали параллелограмма равны, следовательно, параллелограмм является прямоугольником. Это можно установить и из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, так как их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -3\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 3 = 0.$

Пример 2.5. Найти вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{1,3,2\}$, если его проекция на вектор $\vec{b} = \{2,1,0\}$ равна $-2\sqrt{5}.$

Решение. Так как вектор $\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, то $\vec{c} = \lambda\vec{a}$. Вычислим проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{b}$ по формулам (2.17) и (2.11):

$$np_{\vec{b}}\,\vec{c} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|} = \frac{\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|} = \frac{\lambda\,(1\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 0)}{\sqrt{2^2+1^2+0}} = \frac{5\lambda}{\sqrt{5}} = \lambda\sqrt{5}.$$

С другой стороны, по условию $np_{\vec{b}}\vec{c} = -2\sqrt{5}.$ Таким образом, $\lambda\sqrt{5} = -2\sqrt{5},\ \ \lambda = -2.$ Тогда $\vec{c} = \lambda\,\vec{a} = -2\vec{a} = \{-2,-6,-4\}$.

Пример 2.6. Найти длину медианы *AM* треугольника *ABC* и угол φ между медианой *AM* и стороной *AB*, если $AB = 10$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = 60°.$

Решение. На векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ построим параллелограмм $ABCD$ (рис.18). Половина его диагонали AD будет равна медиане AM треугольника ABC. Введем векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}.$ По правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

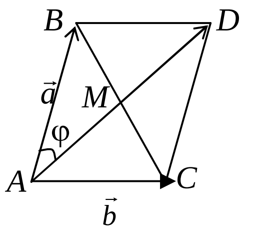


Рис.18

Для отыскания длины вектора $\overrightarrow{AD}$ используем формулу (2.12)

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\,\vec{a}+\vec{b}\,\right| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}.$$

Так как $\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2 = 100,\ \vec{b}^{\,2} = |\,\vec{b}\,|^2 = 36,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cos(\vec{a},\hat{\vec{b}}) = 30,$ то

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{100+2\cdot 30+36} = \sqrt{196} = 14,\quad AM = \frac{1}{2}AD = 7.$$

Для отыскания угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ воспользуемся формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{10\cdot 14} = \frac{\vec{a}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}}{140} = \frac{100+30}{140} = \frac{13}{14}.\ \text{Тогда}\ \varphi = \arccos\frac{13}{14}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\ \ \vec{b} = 6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}.$ Найти $np_{\vec{a}}\vec{b},$ угол $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}).$

Ответ: $\frac{20}{3};\ \ \arccos\frac{20}{21}.$

Пример. Найти вектор $\vec{p}$, если $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{c},\ \ |\vec{p}| = 75,\ \ \vec{c} = \{16,-15,12\}.$

Ответ: $\vec{p} = -48\vec{i}+45\vec{j}-36\vec{k}.$

2.6. Векторное произведение векторов

Понятие правой и левой тройки

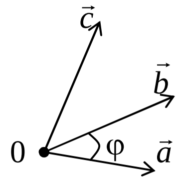


Рис. 19

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***правой***, если с конца третьего вектора *кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки*. В противном случае тройка векторов называется левой. На рис. 19 тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является правой, так как с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот (т.е. на угол φ) от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки. Тройка же векторов $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$ является левой, так как с конца третьего вектора (вектора $\vec{c}$) кратчайший поворот от первого вектора (вектора $\vec{b}$) ко второму вектору (вектору $\vec{a}$) происходит по часовой стрелке.

Заметим, что вообще при перестановке местами двух соседних векторов ориентация этой тройки меняется, т.е. правая тройка становится левой, а левая – правой. При круговой перестановке векторов в тройке ориентация тройки не меняется, т.е. ориентации троек $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{b},\vec{c},\vec{a})$, $(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$ − одинаковы.

Определение векторного произведения

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***вектор*** $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку (рис.20).

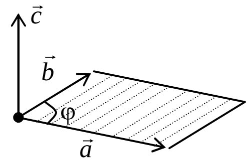


Рис.20

Обозначается векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$. Заметим, что длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 2.7. Показать, что $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$.

Решение. Покажем, что $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$. Действительно, длина вектора $\vec{k}$ равна единице, т.е. равна площади прямоугольника, построенного на векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Кроме того, вектор $\vec{k}$ перпендикулярен векторам $\vec{i},\vec{j}$ и векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ образуют правую тройку, так как с конца вектора $\vec{k}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{i}$ к вектору $\vec{j}$ происходит против часовой стрелки (рис.21).

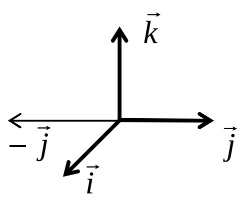


Рис.21

Теперь покажем, что $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$. Действительно, $\left|-\vec{j}\right|=1=\left|\vec{i}\times\vec{k}\right|$, вектор $-\vec{j}$ перпендикулярен векторам $\vec{i},\vec{k}$ и векторы $\vec{i},\vec{k},-\vec{j}$ образуют правую тройку, так как с конца вектора $-\vec{j}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{i}$ к вектору $\vec{k}$ происходит против часовой стрелки (рис. 21). Равенство $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ проверьте самостоятельно.

Свойства векторного произведения

1). Векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.
2). Векторное произведение векторов меняет знак при перестановке векторов:
$$\vec b\times\vec a=-\vec a\times\vec b.$$
3). Свойство линейности $\quad(\lambda\vec a+\mu\vec b)\times\vec c=\lambda\,(\vec a\times\vec c)+\mu\,(\vec b\times\vec c)$

Докажем первое свойство: $\vec a\times\vec b=\vec 0\Leftrightarrow\left|\vec a\times\vec b\right|=0;$
$$\left|\vec a\times\vec b\right|=\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|\sin\varphi=0\Leftrightarrow\sin\varphi=0\Leftrightarrow\varphi=0\ \text{ или }\ \varphi=\pi,$$
т.е. векторы $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны.

Докажем второе свойство: $\vec b\times\vec a=-\vec a\times\vec b.$ Действительно, длины векторов $\vec b\times\vec a$ и $\vec a\times\vec b$ равны (так как равны площади параллелограммов, построенных на векторах $\vec a,\vec b$ и $\vec b,\vec a$); векторы $\vec b\times\vec a$, и $\vec a\times\vec b$ − коллинеарны (так как перпендикулярны плоскости векторов $\vec a$ и $\vec b$) и противоположно направлены (так как кратчайший поворот (рис. 22) против часовой стрелки от $\vec a$ к $\vec b$ виден с конца вектора $\vec a\times\vec b$, а от $\vec b$ к $\vec a$ − с конца вектора $-\vec a\times\vec b$).

Доказательство третьего свойства приводить не будем.

Из свойства линейности следует, что при векторном умножении можно раскрывать скобки, выносить числовой множитель, но нельзя менять порядок сомножителей.

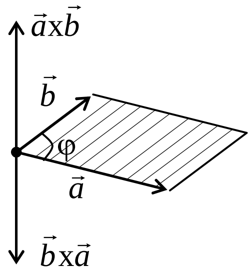


Рис. 22

Пример 2.8. Вычислить $(\vec i-\vec j)\times(\vec i+\vec j).$

Решение. Раскроем скобки, используя свойство линейности и сохраняя порядок множителей:
$$(\vec i-\vec j)\times(\vec i+\vec j)=\vec i\times\vec i-\vec j\times\vec i+\vec i\times\vec j-\vec j\times\vec j.$$
Из первого свойства следует, что $\vec i\times\vec i=0,\ \ \vec j\times\vec j=0.$ Из второго свойства и примера 2.7 следует, что $-\vec j\times\vec i=\vec i\times\vec j=\vec k.$ Окончательно получаем: $(\vec i-\vec j)\times(\vec i+\vec j)=2\vec k.$

Вычисление векторного произведения в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\vec i,\vec j,\vec k$ векторы $\vec a$ и $\vec b$ имеют соответственно координаты $\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\{b_1,b_2,b_3\}$. Это значит, что
$$\vec a=a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k,\qquad\vec b=b_1\vec i+b_2\vec j+b_3\vec k.$$
Найдем векторное произведение векторов, используя свойство линейности:
$$\vec a\times\vec b=(a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k)\times(b_1\vec i+b_2\vec j+b_3\vec k)=a_1b_1(\vec i\times\vec i)+a_1b_2(\vec i\times\vec j)+a_1b_3(\vec i\times\vec k)+$$
$$+a_2b_1(\vec j\times\vec i)+a_2b_2(\vec j\times\vec j)+a_2b_3(\vec j\times\vec k)+a_3b_1(\vec k\times\vec i)+a_3b_2(\vec k\times\vec j)+a_3b_3(\vec k\times\vec k).$$
Из первого свойства следует, что $\vec i\times\vec i=0,\ \vec j\times\vec j=0,\ \vec k\times\vec k=0.$ Из второго свойства и примера 2.7 имеем:
$$\vec i\times\vec j=\vec k,\qquad\vec i\times\vec k=-\vec j,\qquad\vec j\times\vec k=\vec i,$$
$$\vec j\times\vec i=-\vec k,\qquad\vec k\times\vec i=\vec j,\qquad\vec k\times\vec j=-\vec i.$$

Учитывая все эти соотношения, получим:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\,(a_2b_3-a_3b_2)-\vec{j}\,(a_1b_3-a_3b_1)+\vec{k}\,(a_1b_2-a_2b_1) \text{ или}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}. \qquad (2.19)$$

Принята следующая удобная условная запись равенства (2.19):

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}}\,. \qquad (2.20)$$

В этой формуле $\{a_1,a_2,a_3\}$ − координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, $\{b_1,b_2,b_3\}$ − координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Если разложить "определитель" в формуле (2.20) по элементам первой строки, то получим формулу (2.19).

Пример 2.9. Вычислить $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}$.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ имеют соответственно координаты $\{2,-1,3\}$ и $\{3,-1,0\}$. Поэтому по формуле (2.20) имеем

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k}.$$

Применение векторного произведения

1). Вычисление площади $S_П$ параллелограмма и площади S треугольника, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.23):

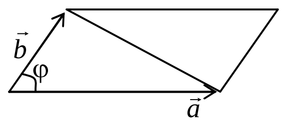


Рис. 23

$$\boxed{S_П=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,\quad S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.} \qquad (2.21)$$

Действительно, $S_П=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$ и $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi.$

2). Отыскание вектора $\vec{c}$, перпендикулярного заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\boxed{\vec{c}=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}\,. \qquad (2.22)$$

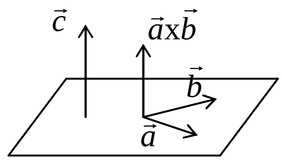


Рис. 24

Действительно, вектор $\vec{c}$ и вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярны одной и той же плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следовательно, эти векторы коллинеарны (рис.24) и отличаются лишь некоторым числовым множителем λ.

3). Вычисление момента $\vec{m}_0$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке *M*, относительно точки O (рис.25):

$$\boxed{\vec{m}_0=\vec{r}\times\vec{F}}. \qquad (2.23)$$

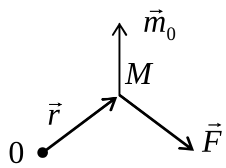


Рис. 25

Эта формула известна из физики; через $\vec{r}$ обозначен радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

4). Вычисление линейной скорости $\vec{v}$ точки M, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{w}$ (рис. 26):

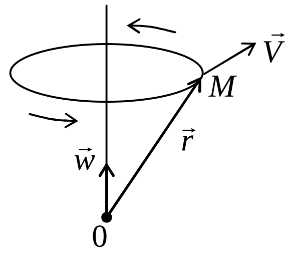


Рис. 26

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}}\,. \tag{2.24}$$

Вектор угловой скорости $\vec{w}$ направлен по оси вращения так, что, глядя с его конца, вращение точки M видно против часовой стрелки; вектор $\vec{v}$ линейной скорости направлен по касательной к траектории; $\vec{r}$ − радиус-вектор точки M.

Пример 2.10. Силы $\vec{F}_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k},\ \vec{F}_2 = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ приложены к точке $M(4,3,1)$. Вычислить момент равнодействующей этих сил относительно точки $O(3,1,0)$.

Решение. Найдем равнодействующую силу $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \{2, -1, 4\}$ и вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{1,2,1\}$. Искомый момент $\vec{m}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ вычислим по формуле (2.23):

$$\vec{m}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Пример 2.11. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если $\overrightarrow{AC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\overrightarrow{BD} = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ − единичные векторы и $(\vec{e}_1 \hat{,} \vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Сначала найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис.27):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.$$

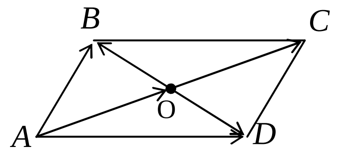


Рис. 27

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, используя свойства векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \times (3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + 3\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - 6\vec{e}_2 \times \vec{e}_2.$$

Так как $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, то получим:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = -6\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + 3\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -3\vec{e}_1 \times \vec{e}_2.$$

Вычислим площадь параллелограмма по формуле (2.21):

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |-3| \cdot |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = 3 \cdot |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \sin(\vec{e}_1 \hat{,} \vec{e}_2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2.12. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{41}$ и вектор $\vec{c}$ образует тупой угол с осью oz.

Решение. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найдем по формулам (2.22) и (2.20):

$$\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \left(\vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = \lambda(-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}).$$

Зная длину вектора $\vec{c}$, найдем $|\lambda|$:

$$|\vec{c}| = 3\sqrt{41} = |\lambda| \cdot \left|-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}\right| = |\lambda| \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 6^2} = |\lambda| \sqrt{41}.$$

Отсюда получим, что $|\lambda|=3$ и $\lambda=\pm3$. Установим знак λ. По условию вектор $\vec{c}$ образует тупой угол с осью *oz*, а значит, и с вектором $\vec{k}$. Поэтому $\vec{c}\cdot\vec{k}<0$. Но $\vec{c}\cdot\vec{k}=6\lambda$. Следовательно, $\lambda<0$. Итак, $\lambda=-3$ и $\vec{c}=\lambda(-\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k})=3\vec{i}+6\vec{j}-18\vec{k}$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Найти высоту *AK* и площадь треугольника с вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.

Ответ: $S=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$, $AK=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Пример. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он перпендикулярен векторам $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

Ответ: $\vec{x}=\{-5,-10,-5\}$.

2.7. Смешанное произведение векторов

Определение смешанного произведения

Пусть вектор $\vec{a}$ ***векторно*** умножается на вектор $\vec{b}$, затем получившийся вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ ***скалярно*** умножается на вектор $\vec{c}$. В результате получается ***число,*** которое называется векторно-скалярным или смешанным произведением векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Таким образом,

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}\,. \tag{2.25}$$

Свойства смешанного произведения

1). Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.
2). Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарны, то модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.
3). Смешанное произведение не меняется при перестановке местами знаков векторного и скалярного умножения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.
4). Свойство линейности: $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\vec{c}\,\vec{d}=\lambda(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d})+\mu(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})$.

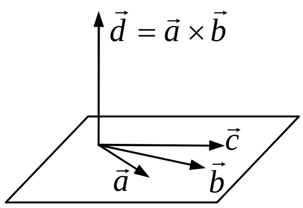


Рис.28

Проверим первое свойство. Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ есть скалярное произведение вектора $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$ и потому равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ – перпендикулярны. Вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a},\vec{b}$. Поэтому вектор $\vec{c}$ будет перпендикулярен вектору $\vec{d}$ (рис.28) тогда и только тогда, когда он будет находиться в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Проверим второе свойство. С одной стороны,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cos\theta\,, \tag{2.26}$$

где θ − угол между вектором $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектором $\vec{c}$ (рис.29). С другой стороны, объем параллелепипеда *V*, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равен произведению площади основания, равной $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, на высоту, равную $|\vec{c}|\cdot|\cos\theta|$ (рис. 29), т.е.

$$V=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cdot|\cos\theta|=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Другие два свойства доказывать не будем.

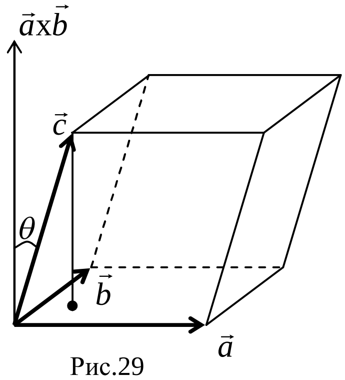


Рис.29

Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ заданы векторы

$$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\quad \vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\},\quad \vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}.$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов, воспользовавшись формулой: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Вспомним, что

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}b_2&b_3\\ c_2&c_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}b_1&b_3\\ c_1&c_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}b_1&b_2\\ c_1&c_2\end{vmatrix}.$$

Далее, скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}\times\vec{c}$ равно сумме произведений их одноименных координат:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\ c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\ c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\ c_1&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

Итак, смешанное произведение векторов $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3)$, заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$\boxed{\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}}\,. \tag{2.27}$$

Пример 2.13. Вычислить смешанное произведение векторов

$$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k},\quad \vec{b}=3\vec{i}-\vec{j},\quad \vec{c}=\vec{i}+4\vec{k}.$$

Решение. По формуле (2.27) имеем:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2&1&-3\\ 3&-1&0\\ 1&0&4\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\ 0&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3&0\\ 1&4\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\ 1&0\end{vmatrix}=2\cdot(-4)-1\cdot12-3\cdot1=-23.$$

Применение смешанного произведения

1). Проверка компланарности трех векторов

$$\boxed{\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\text{компланарны}\;\Leftrightarrow\;\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0}\,. \tag{2.28}$$

2). Проверка принадлежности четырех точек A,B,C,D одной плоскости Π

$$\boxed{(A,B,C,D)\in\Pi\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0}\,. \tag{2.29}$$

Действительно, точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости (рис.30) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ компланарны, что равносильно равенству нулю их смешанного произведения.

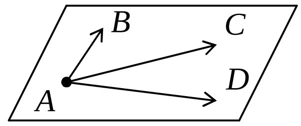


Рис. 30

3). Вычисление объемов пирамиды и параллелепипеда, построенных на векторах $\vec a, \vec b, \vec c$, и их высоты h_c, опущенной из конца вектора $\vec c$:

$$\boxed{V_{пар} = \left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right|, \quad V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right|, \quad h_c = \frac{\left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right|}{\left|\vec a \times \vec b\right|}}. \tag{2.30}$$

Действительно, из второго свойства смешанного произведения следует, что модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда $V_{пар}$, построенного на векторах $\vec a, \vec b, \vec c$. С другой стороны, объем параллелепипеда равен произведению площади основания $S_{осн}$ на высоту h_c. Основанием является параллелограмм, построенный на векторах $\vec a$ и $\vec b$. Поэтому $S_{осн} = S = \left|\vec a \times \vec b\right|$. Таким образом,

$$h_c = \frac{V_{пар}}{S} = \frac{\left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right|}{\left|\vec a \times \vec b\right|}.$$

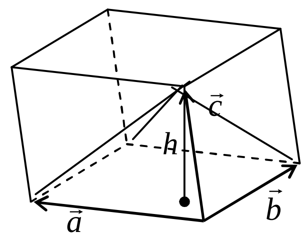


Рис. 31

Для вычисления объема пирамиды $V_{пир}$, построенной на векторах $\vec a, \vec b, \vec c$ (рис.31), воспользуемся формулой

$$V_{пир} = \frac{1}{3}S \cdot h_c = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S \cdot h_c = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{1}{6}\left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right|.$$

Пример 2.14. Проверить, что векторы $\vec a = \vec i - 2\vec j,\ \vec b = 3\vec i - 5\vec j + 4\vec k,\ \vec c = 2\vec i + \vec k$ некомпланарны. Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, и высоту h_a, опущенную из конца вектора $\vec a$.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\vec a, \vec b, \vec c$

$$\vec a\, \vec b\, \vec c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -15.$$

Так как $\vec a\, \vec b\, \vec c \neq 0$, то векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ - некомпланарны, а объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $\left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right| = 15$. Для вычисления высоты h_a, опущенной из конца вектора $\vec a$, найдем векторное произведение

$$\vec b \times \vec c = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec i\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec i + 5\vec j + 10\vec k.$$

Вычислим искомую высоту: $h_a = \dfrac{\left|\vec a\, \vec b\, \vec c\right|}{\left|\vec a \times \vec b\right|} = \dfrac{15}{\sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 10^2}} = \dfrac{15}{5\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

Пример 2.15. Вычислить $пр_{\vec c}\, \vec a \times \vec b$, если $\vec a = \{2, 3, -1\},\ \vec b = \{1, 9, -1\},\ \vec c = \{1, -1, 0\}$.

Решение. Воспользуемся формулами (2.17) и (2.25): $np_{\vec c}\,\vec a \times \vec b = \dfrac{(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c}{|\vec c|} = \dfrac{\vec a\vec b\vec c}{|\vec c|}$.

Вычислим длину вектора $|\vec c| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ и смешанное произведение

$$\vec a\vec b\vec c = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & -11 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -11 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -45.$$

Тогда $np_{\vec c}\,\vec a \times \vec b = \dfrac{-45}{\sqrt{2}} = \dfrac{-45\sqrt{2}}{2}$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$. Найти длину высоты, опущенной на грань BCD.

Ответ: $V = 120$, $h = \frac{4\sqrt{510}}{17}$.

Пример. Показать, что точки $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$, $D(1,5,0)$ лежат в одной плоскости.

3. Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия изучает геометрические объекты (линии, поверхности) алгебраическими (аналитическими) методами. Для этого вводят понятия уравнения линии или поверхности. Уравнением линии или поверхности называют уравнение, которому удовлетворяют координаты всех ее точек и только они.

Мы рассмотрим линии и поверхности, которые имеют уравнения первой и второй степени.

3.1. Плоскость и ее уравнение

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть на плоскости задана точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec N = \{A, B, C\}$, перпендикулярный плоскости (рис. 32). Вектор $\vec N$ называют ***нормальным*** вектором плоскости. Произвольная точка $P(x, y, z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{P_0P}$ и $\vec N$ ортогональны, а значит, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec N = 0$, или в координатной форме

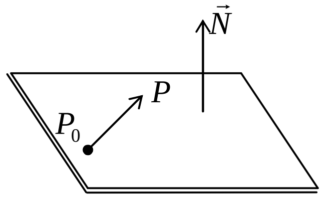


Рис. 32

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}. \qquad (3.1)$$

Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в уравнении (3.1): $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$.
Обозначив выражение в скобках через D, получим общее уравнение плоскости

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}. \qquad (3.2)$$

Отметим, что коэффициенты A, B, C есть координаты нормального вектора плоскости.

Уравнение плоскости (3.2) есть уравнение первой степени относительно x, y, z. Справедливо и обратное: всякое уравнение первой степени определяет плоскость.

Неполные уравнения плоскости

Выделим следующие случаи:

1). Если в уравнении плоскости отсутствует переменная x, то плоскость параллельна оси ox.

2). Если в уравнении плоскости отсутствует переменная y (или z), то плоскость параллельна оси oy (или oz).

3). Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, например, x и y, то плоскость параллельна плоскости xoy.

Действительно, если уравнение плоскости имеет вид: $By + Cz + D = 0$ (отсутствует x), то нормальный вектор плоскости $\vec{N} = \{0, B, C\}$ перпендикулярен оси ox, а значит, сама плоскость параллельна оси ox. Если в уравнении плоскости отсутствуют x и y, то плоскость параллельна осям ox и oy, а значит, и плоскости xoy.

Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Угол между плоскостями w_1 и w_2 определяется как угол между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (рис. 33). Поэтому

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}}.$$

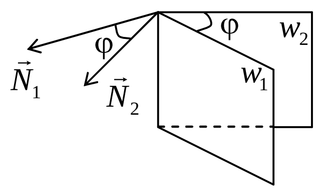


Рис. 33

Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны, т.е.

$$\boxed{\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2} \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

Плоскости ортогональны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы ортогональны, т.е.

$$\boxed{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 0 \quad \text{или} \quad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.}$$

Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость (рис.34) с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и точку $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Опустим из точки P_1 на плоскость перпендикуляр P_1O и рассмотрим на плоскости точку $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Вычислим искомое расстояние

$$d = P_1O = \left| np_{\vec{N}}\, \overrightarrow{P_2P_1} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{N} \right|}{\left| \overrightarrow{N} \right|}.$$

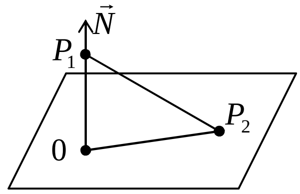


Рис. 34

Запишем это равенство в координатной форме, учитывая, что $\overrightarrow{P_2P_1} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$, $\vec{N} = \{A, B, C\}$:

$$d = \frac{\left| A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left| (Ax_1 + By_1 + Cz_1) - (Ax_2 + By_2 + Cz_2) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Точка P_2 лежит на плоскости, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. $Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D.$ Учитывая это, получим формулу для вычисления расстояния от точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\boxed{d = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}. \qquad (3.3)$$

Пример 3.1. Найти расстояние от точки $P_1(-1,4,5)$ до плоскости, проходящей через точку $P_0(3,-1,0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = \{4,-2,1\}$.

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку P_0 и перпендикулярной вектору $\vec{N},$ используя формулу (3.1):

$$4(x-3) - 2(y+1) + 1(z-0) = 0, \text{ или } 4x - 2y + z - 14 = 0.$$

Найдем расстояние от точки $P_1(-1,4,5)$ до этой плоскости по формуле (3.3)

$$d = \frac{\left| 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 5 - 14 \right|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}.$$

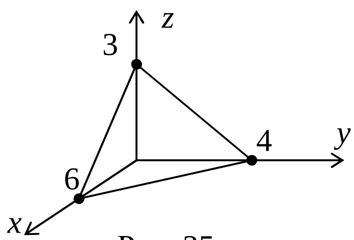


Рис. 35

Пример 3.2. Построить плоскости с уравнениями $2x + 3y + 4z = 12$ и $3x + 2y = 6.$ Найти угол между этими плоскостями.

Решение. Первое уравнение – полное, содержит x, y, z. Для построения плоскости удобно найти точки пересечения плоскости с осями координат:

$$\text{если } y = z = 0, \text{ то } x = 6;$$
$$\text{если } x = z = 0, \text{ то } y = 4;$$
$$\text{если } x = y = 0, \text{ то } z = 3.$$

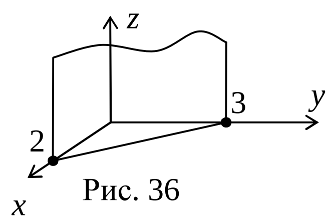


Рис. 36

Построим эти три точки $M_1(6,0,0)$, $M_2(0,4,0)$, $M_3(0,0,3)$ и проведем через них плоскость (рис. 35).

Во втором уравнении $3x + 2y = 6$ отсутствует z, значит, это уравнение определяет плоскость, параллельную оси oz и проходящую через прямую $3x + 2y = 6$, лежащую в плоскости xoy (рис.36).

Для отыскания угла между плоскостями запишем их нормальные векторы $\vec{N}_1 = \{2,3,4\}$, $\vec{N}_2 = \{3,2,0\}$ и найдем угол между этими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 0}} \approx 0.63, \qquad \varphi = \arccos 0.63 \approx 51°.$$

Пример 3.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(1,2,3)$, $B(0,-2,1)$, $C(-4,-3,2)$.

Решение. Точка $M(x,y,z)$ принадлежит искомой плоскости (рис. 37) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны, и, значит, их смешанное произведение равно нулю :

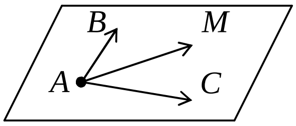


Рис. 37

$$\left(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0-1 & -2-2 & 1-3 \\ -4-1 & -3-2 & 2-3 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда $(x-1)(-6)-(y-2)(-9)+(z-3)(-15)=0$, или $2x-3y+5z=11$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,1,1)$ параллельно плоскости $-2x+y-z+1=0$. Вычислить расстояние между этими плоскостями.

Ответ: $2x-y+z-2=0$; $d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданные точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ перпендикулярно плоскости $x-y+1=0$.

Указание: использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и нормального вектора $\vec{N}$ заданной плоскости.

Ответ: $x+y-3=0$.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0,1,2)$ параллельно векторам $\vec{a}_1=\{2,0,1\}$, $\vec{a}_2=\{1,10\}$. Нарисовать эту плоскость.

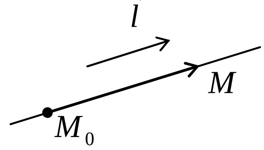
Указание: использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Ответ: $x-y-2z+5=0$.

3.2. Прямая на плоскости и в пространстве

Канонические и параметрические уравнения прямой

Пусть известна точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащая на прямой (рис. 38), и вектор $\vec{l}=\{m,n,p\}$, параллельный прямой (он называется направляющим вектором прямой). Точка $M(x,y,z)$ принадлежит прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ и $\vec{l}=\{m,n,p\}$ коллинеарны, а значит их координаты пропорциональны:



$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}\,. \qquad (3.4)$$

Рис. 38

Полученные уравнения называют ***каноническими*** уравнениями прямой в пространстве.

Обозначив коэффициент пропорциональности в соотношении (3.4) через t, получим ***параметрические*** уравнения прямой в пространстве:

$$\boxed{x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt}\,. \tag{3.5}$$

На плоскости xoy уравнения прямой будут иметь вид:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}} \quad \text{или} \quad \boxed{x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt}\,. \tag{3.6}$$

Пример 3.4. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$ и прямой $x = 3t - 4,$ $y = 4t + 5, \quad z = 5t - 1.$ Записать уравнение плоскости, проходящей через прямые.

Решение. Из канонических уравнений первой прямой следует, что ее направляющий вектор $\vec{l}_1 = \{-1,2,2\}$ и ее точка $M_1(1,-2,3)$. Из параметрических уравнений второй прямой следует, что ее направляющий вектор $\vec{l}_2 = \{3,4,5\}$ и ее точка $M_2(-4,5,-1)$. Угол φ между прямыми совпадает с углом между их направляющими векторами, поэтому $\cos\varphi$ вычислим, используя формулы (2.14):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right| \cdot \left|\vec{l}_2\right|} = \frac{-1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}\cdot\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{15}{3\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости, проходящей через заданные прямые (рис. 39), тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \quad \vec{l}_1, \ \vec{l}_2$ − компланарны, а значит их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M}, \ \vec{l}_1, \ \vec{l}_2) = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0\,.$$

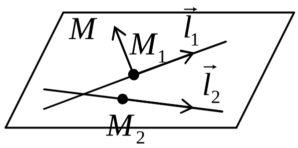


Рис. 39

Раскрывая определитель, получим уравнение искомой плоскости $(x-1)\cdot 2 - (y+2)\cdot(-11) + (z-3)\cdot(-10) = 0$, или

$$2x + 11y - 10z + 50 = 0\,.$$

Пример 3.5. Найти точку *Q*, симметричную точке $P(2,-5,7)$ относительно прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}.$

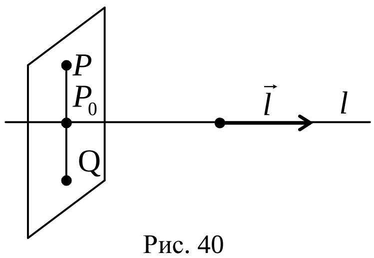


Рис. 40

Решение. Проведем через точку $P(2,-5,7)$ плоскость, перпендикулярную заданной прямой l (рис. 40). Направляющий вектор прямой $\vec{l} = \{1,3,2\}$ одновременно является нормальным вектором плоскости, поэтому ее уравнение (3.1) примет вид: $1\cdot(x-2) + 3\cdot(y+5) + 2\cdot(z-7) = 0.$ Уравнение заданной прямой запишем в параметрическом виде:

$$x = t + 5, \quad y = 3t + 4, \quad z = 2t + 6. \tag{3.7}$$

Найдем точку пересечения P_0 прямой и плоскости, подставив x, y, z из уравнения прямой (3.7) в уравнение плоскости: $(t + 5 - 2) + 3(3t + 4 + 5) + 2(2t + 6 - 7) = 0.$ Получим значение параметра $t = -2,$ соответствующее точке пересечения P_0 прямой и плоскости. Из уравнений прямой (3.7) при $t = -2$ получим координаты ее точки $P_0(3,-2,2).$ Точка P_0 является серединой отрезка *PQ*, поэтому ее координаты равны полусумме соответствующих координат точек $P(2,-5,7)$ и

$Q(x,y,z)$: $\quad 3=\frac{x+2}{2}, \quad -2=\frac{y-5}{2}, \quad 2=\frac{z+7}{2}.$ Следовательно, искомая точка Q имеет координаты: $x=4,\ y=1,\ z=-3.$

Общие уравнения прямой в пространстве

Пусть прямая l является линией пересечения двух непараллельных плоскостей w_1 и w_2 (рис. 41). Тогда координаты всех точек прямой удовлетворяют уравнениям первой и второй плоскости, т.е. системе уравнений

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}} \tag{3.8}$$

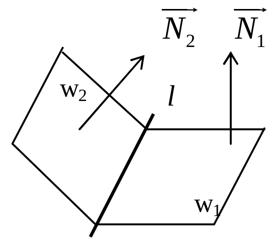


Рис.41

Система уравнений (3.8) называется общими уравнениями прямой в пространстве.

Пример 3.6. Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями: $\begin{cases} 3x-2y+2z-3=0, \\ 2x+3y-z-4=0. \end{cases}$

Решение. Найдем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на прямой. В системе, определяющей прямую, два уравнения и три неизвестных. Поэтому одно неизвестное выберем произвольно, например $z=1$, подставим в систему и найдем два других неизвестных: $x=1,\ y=1.$ Таким образом, на прямой найдена точка $M_0(1,1,1)$. Плоскости, задающие прямую, имеют нормальные векторы $\vec{N}_1=\{3,-2,2\}$ и $\vec{N}_2=\{2,3,-1\}$. Направляющий вектор прямой $\vec{l}$ перпендикулярен этим нормальным векторам (рис.41). Поэтому

$$\vec{l}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+7\vec{j}+13\vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения (3.4) прямой примут вид: $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{13}.$

Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой и плоскостью есть угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 42). Рассмотрим дополнительный угол $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi.$ Тогда

$$\sin\varphi=\cos\alpha=\cos(\vec{N}\,\hat{,}\,\vec{l})=\frac{\vec{N}\cdot\vec{l}}{|\vec{N}|\cdot|\vec{l}|}.$$

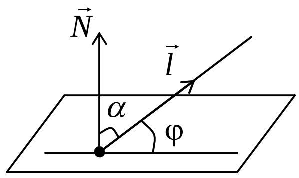


Рис. 42

Здесь $\vec{N}$ − нормальный вектор плоскости, $\vec{l}$ − направляющий вектор прямой.

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Для отыскания расстояния d от точки M_1 до прямой l (рис. 43) опустим перпендикуляр из точки M_1 на прямую l. Пусть M_0 − известная точка на прямой, l − направляющий вектор прямой. Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{l}$. С одной стороны, площадь параллелограмма $S = d\cdot\left|\vec{l}\right|$. С другой стороны, $S = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{l}\right|$. Поэтому $d\cdot\left|\vec{l}\right| = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{l}\right|$ и, значит, расстояние d от точки M_1 до прямой l, проходящей через точку M_0, можно вычислить по формуле

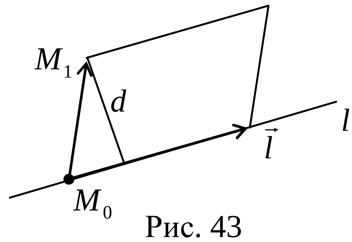


Рис. 43

$$\boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{l}\right|}{\left|\vec{l}\right|}}. \qquad (3.9)$$

Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом

Рассмотрим прямую на плоскости. Пусть α − угол наклона прямой к оси ox (рис. 44). Тогда направляющий вектор $\vec{l}$ единичной длины имеет координаты $m = \cos\alpha,\quad n = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha.$ Поэтому каноническое уравнение прямой (3.6) примет вид: $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}$, или $(y-y_0) = \operatorname{tg}\alpha(x-x_0)$. Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент прямой; уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом имеет вид:

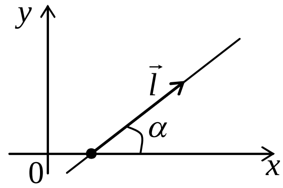


Рис. 44

$$\boxed{(y-y_0) = k(x-x_0)}\ . \qquad (3.10)$$

Если на плоскости xoy заданы две прямые с известными угловыми коэффициентами $k_1 = tg\alpha_1$ и $k_2 = tg\alpha_2$ (рис.45), то можно найти угол φ между этими прямыми:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2} \text{ или}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}}. \qquad (3.11)$$

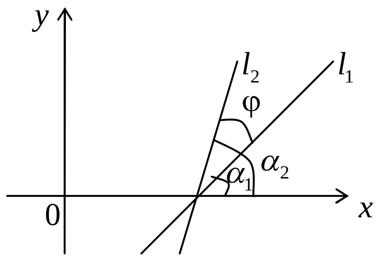


Рис. 45

Параллельность прямых l_1, l_2 равносильна равенству углов наклона α_1, α_2 и, следовательно, равенству угловых коэффициентов k_1 и k_2:

$$\boxed{l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2}\ . \qquad (3.12)$$

Для перпендикулярных прямых l_1 и l_2 (рис.46) имеем $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \dfrac{\pi}{2}$,

$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{-1}{\operatorname{tg}\alpha_1} = -\frac{1}{k_1}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}}. \qquad (3.13)$$

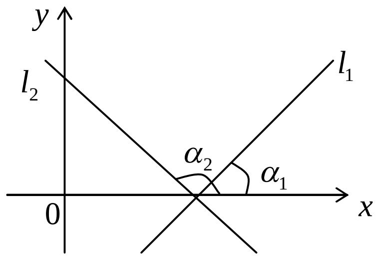


Рис. 46

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0,-2,1)$, $M_2(1,2,3)$. Ответ: $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$.

Пример. Убедиться, что прямые $l_1:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{4}$ и $l_2:\ \begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-11=0\end{cases}$ параллельны. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

Указание: найти направляющий вектор прямой l_1, точку M_2 на прямой l_2 и использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{l}_1$.

Ответ: $5x+11y-z-7=0$.

Пример. Найти проекцию точки $P(1,0,-2)$ на плоскость $6x+5y-7z+90=0$.

Указание: написать уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно заданной плоскости, и найти точку пересечения этой прямой и плоскости. Ответ: $(-5,-5,5)$.

Пример. Убедиться, что прямая $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-8}$ параллельна плоскости $2x-2y+z+7=0$. Найти расстояние между прямой и плоскостью.

Указание: проверить ортогональность направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости. Найти точку на прямой и расстояние от этой точки до плоскости. Ответ: $d=4/3$.

3.3. Кривые второго порядка

Кривые второго порядка – это линии на плоскости, которые описываются уравнениями второго порядка. Установлено, что к кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола. Других кривых второго порядка нет, если не учитывать случаи вырождения кривой в точку или прямые.

Кривые второго порядка играют важную роль в естествознании. Например, траектории движения планет есть эллипсы. В физике широко используются оптические свойства кривых второго порядка, например, на них основано устройство прожектора.

Эллипс и его уравнение

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна и больше расстояния между фокусами.

Выведем уравнение эллипса. Пусть F_1 и F_2 − фокусы эллипса. Расстояние между ними обозначим через $2c$, а постоянную сумму расстояний от любой точки M эллипса до фокусов обозначим через $2a$. По определению эллипса, $|MF_1|+|MF_2|=2a$ и $2a>2c$, т.е. $a>c$.

Выберем систему координат так, чтобы ось ox проходила через фокусы, а ось oy – посередине между ними (рис. 47). Тогда координаты фокусов

$F_1(-c, 0)$, $F_2(+c, 0)$. Если $M(x, y)$ − произвольная точка эллипса, то

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и сумма этих расстояний постоянна и равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

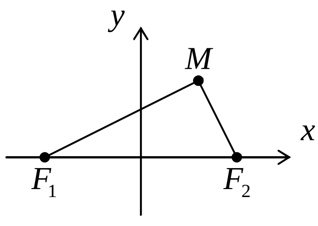


Рис. 47

Преобразуем это уравнение к более удобному виду. Перенесем один из радикалов в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$\left(x^2 - 2xc + c^2\right) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \left(x^2 + 2xc + c^2\right) + y^2.$$

После упрощения получим $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения и сгруппируем подобные члены: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Так как $a > c$, то разность $a^2 - c^2$ положительна; обозначим ее b^2 и разделим обе части полученного равенства на a^2b^2. В результате получим

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}. \tag{3.14}$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением эллипса***. Здесь $b^2 = a^2 - c^2$. В частном случае при $b = a$ уравнение (3.14) примет вид: $x^2 + y^2 = a^2$, т.е. определяет окружность радиуса a с центром в начале координат. Таким образом, окружность есть частный случай эллипса.

Используя уравнение эллипса, установим ряд его свойств.

1). *Эллипс симметричен относительно осей и начала координат*. Действительно, его уравнение содержит x и y только во второй степени. Поэтому, если пара чисел (x, y) удовлетворяет уравнению (3.14), то пары $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ также удовлетворяют этому уравнению. Другими словами, если точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, то точки $M_1(x, -y)$, $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$, симметричные точке M соответственно относительно оси ox, оси oy и начала координат, также лежат на эллипсе.

2). Ввиду симметрии эллипса достаточно исследовать его уравнение в 1−й четверти, где $x \geq 0$, $y \geq 0$. Из уравнения (3.14) получим $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Эта функция определена при $x \leq a$, равна нулю при $x = a$, равна b при $x = 0$ и убывает с ростом x. Учитывая это, построим эллипс в 1−й четверти (рис. 48). Используя симметрию эллипса, построим его в остальных четвертях (рис. 49).

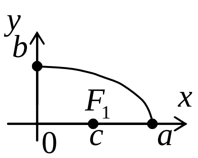


Рис.48

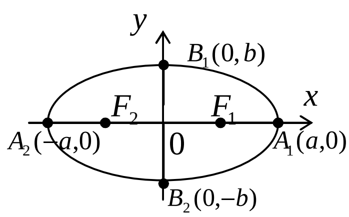


Рис. 49

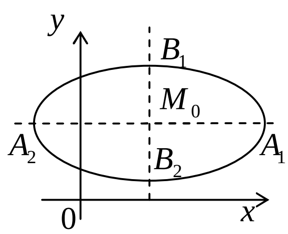


Рис. 50

Точка O называется центром эллипса, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 − осями эллипса. Точки пересечения эллипса с его осями A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.

Если центр эллипса смещен в точку $M_0(x_0, y_0)$, а оси эллипса параллельны осям координат (рис. 50), то уравнение эллипса примет вид:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}. \tag{3.15}$$

Пример 3.7. Установить, какая линия определяется уравнением $2x^2+3y^2-4x+18y+17=0$, и изобразить ее на чертеже.

Решение. Объединим слагаемые с x в одну скобку, слагаемые с y – в другую скобку и вынесем за скобки коэффициенты при x^2 и при y^2:

$$2(x^2-2x)+3(y^2+6y)+17=0.$$

Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$2\left[\left(x^2-2x+1\right)-1\right]+3\left[\left(y^2+6y+9\right)-9\right]+17=0.$$

Тогда $2(x-1)^2-2+3(y+3)^2-27+17=0$ или

$$2(x-1)^2+3(y+3)^2=12.$$

Разделим уравнение на 12:

$$\frac{(x-1)^2}{6}+\frac{(y+3)^2}{4}=1.$$

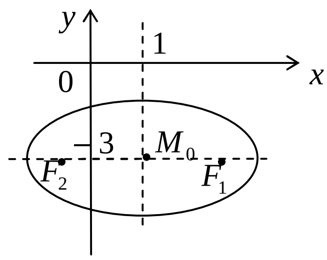


Рис. 51

Получили уравнение вида (3.15), причем $x_0=1,\ y_0=-3,\ a^2=6,\ b^2=4.$ Это уравнение определяет эллипс с центром $M_0(1,-3)$, осями симметрии, параллельными осям координат, полуосями $a=\sqrt{6},\ b=2$ (рис. 51). Найдем еще межфокусное расстояние F_1F_2. Так как $a^2-c^2=b^2$, то $c^2=a^2-b^2=6-4=2.$ Таким образом, $c=\sqrt{2},$ межфокусное расстояние $F_1F_2=2c=2\sqrt{2}.$

Гипербола и ее уравнение

Гиперболой называют множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть F_1 и F_2 − фокусы гиперболы и межфокусное расстояние $|F_1F_2|=2c.$ Обозначим постоянную разность расстояний от любой точки $M(x,y)$ гиперболы до фокусов через $2a$. По определению гиперболы, $|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$ и $2a<2c.$ В правой части равенства выберем знак "+", если $|MF_1|>|MF_2|$, и знак "–", если $|MF_1|<|MF_2|$ (рис. 52).

Выберем прямоугольную систему координат так же, как и в случае эллипса. Тогда

$$|MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad |MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

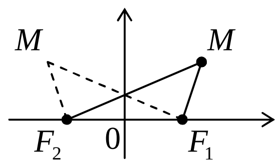


Рис. 52

Разность этих расстояний равна $\pm 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Проводя вычисления, такие же как в случае с эллипсом, получим

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так как $c > a,$ то разность $c^2 - a^2$ − положительна; обозначим ее b^2 и разделим полученное уравнение на a^2b^2. Тогда уравнение примет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \qquad (3.16)$$

которое называют ***каноническим уравнением гиперболы***. Здесь $b^2 = c^2 - a^2.$

Исследуем уравнение гиперболы.

1). Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, так как уравнение гиперболы содержит x и y только во второй степени. Оси координат есть оси симметрии гиперболы, а их пересечение – ее центр.

2). Ввиду симметрии гиперболы достаточно исследовать уравнение гиперболы в первой четверти, где $x \geq 0,\ y \geq 0.$ Из уравнения (3.16) получим $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Эта функция определена при $x \geq a,$ равна нулю при $x = a$ и возрастает с ростом $x.$ При неограниченном возрастании x число a^2 мало по сравнению с x^2 и функция $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ будет близка к функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \frac{b}{a}x,$ т.е. гипербола будет приближаться к прямой $y = \frac{b}{a}x.$ Учитывая это исследование, построим гиперболу в первой четверти (рис. 53). Используя симметрию гиперболы, построим ее в остальных четвертях (рис. 54).

Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, к которым приближается гипербола с ростом x, называются асимптотами гиперболы. Точки $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ называются вершинами гиперболы.

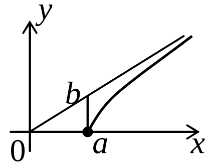


Рис. 53

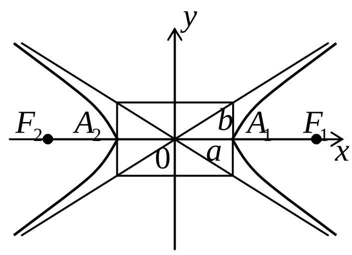


Рис.54

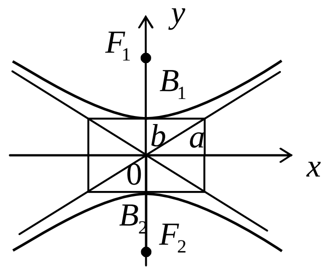


Рис.55

Для построения гиперболы удобно сначала построить прямоугольник с центром в начале координат и сторонами длиной $2a$ и $2b$, параллельными осям координат (рис. 54); затем построить асимптоты, продолжив диагонали прямоугольника, и через вершины гиперболы провести две ее ветви, приближающиеся к асимптотам.

Уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ также определяет гиперболу. Она называется сопряженной гиперболой. При $x = 0$ получаем $y = \pm b$, т.е. эта гипербола имеет вершины $B_1(0,\mathrm{b})$ и $B_2(0,-b)$ (рис. 55).

Если центр гиперболы находится в точке $M_0(x_0, y_0)$, а оси симметрии параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}, \tag{3.17}$$

а уравнение ее асимптот $\boxed{(y-y_0)=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)}$.

Пример 3.8. Установить, какая линия определяется уравнением

$x=-2-\frac{1}{2}\sqrt{y^2-2y+5}$, и изобразить ее на чертеже.

Решение. Запишем уравнение линии в виде $x+2=-\frac{1}{2}\sqrt{y^2-2y+5}$.

Отсюда видно, что $x+2\le 0$ или $x\le -2$. Возведем обе части равенства в квадрат:

$(x+2)^2=\frac{1}{4}\left(y^2-2y+1+4\right)$, или $4(x+2)^2=(y-1)^2+4$, или

$$\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

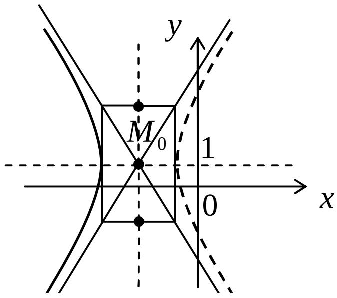


Рис. 56

Получили уравнение вида (3.17), где $x_0=-2,\ y_0=1,\ a=1,\ b=2$. Это уравнение определяет гиперболу с центром $M_0(-2,\ 1)$, осями симметрии, параллельными осям координат. Первоначальному уравнению соответствует только часть гиперболы, а именно – те ее точки, для которых $x\le -2$ (рис. 56).

Парабола и ее уравнение

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

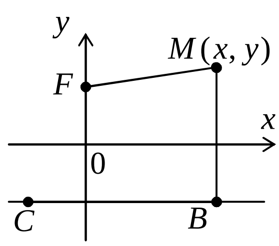


Рис. 57

Пусть F – фокус, прямая CB – директриса (рис. 57). Выберем систему координат следующим образом: ось oy проведем через фокус F перпендикулярно директрисе CB, а ось ox – посередине между фокусом и директрисой. Обозначив расстояние от фокуса до директрисы через p, получим координаты фокуса $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы. По определению параболы, $MF=MB$, т.е. $\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=y+\frac{p}{2}$.

Возведя в квадрат обе части равенства и упростив, получим

$$\boxed{x^2=2py}\ . \tag{3.18}$$

Полученное уравнение называют ***каноническим уравнением параболы.***

Перепишем это уравнение в виде $y=\dfrac{1}{2p}x^2$ или $y=kx^2$, где $k=\dfrac{1}{2p}>0.$ График этой функции хорошо известен (рис. 58). Ось oy является осью симметрии параболы $x^2=2py,$ а точка $(0,0)$ − ее вершиной. Уравнение $x^2=-2py$ также определяет параболу (рис. 58) с осью симметрии oy и вершиной $(0,0)$.

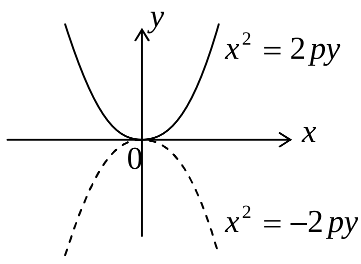


Рис. 58

Поменяв x и y ролями, получим уравнения парабол:

$$\boxed{y^2=2px\ ;\ \ y^2=-2px}. \qquad (3.19)$$

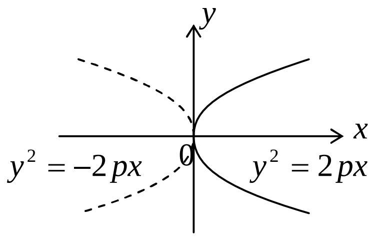


Рис. 59

Ось симметрии этих парабол – ось ox (рис. 59), вершина парабол в точке $(0,0)$.

Уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку $M_0(x_0,y_0)$, и осью симметрии, параллельной оси oy, или параллельной оси ox, примет соответственно вид:

$$\boxed{(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)} \quad \text{или} \quad \boxed{(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)}\ . \qquad (3.20)$$

Пример 3.9. Построить линию с уравнением $y=3-2\sqrt{2-x}$. Найти ее фокус.

Решение. Запишем уравнение в виде $y-3=-2\sqrt{2-x}$ и заметим, что $y-3\le 0$, или $y\le 3$. Возведем обе части равенства в квадрат:

$$(y-3)^2=4(2-x), \quad \text{или} \quad (y-3)^2=-4(x-2).$$

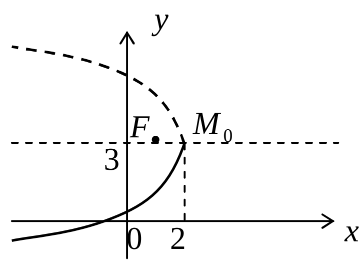


Рис. 60

Получили уравнение вида $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0),$ где $x_0=2,$ $y_0=3,\ \ 2p=4,\ \ p=2.$ Это уравнение определяет параболу с вершиной $M_0(2,3)$ и осью симметрии, параллельной оси ox. Первоначальному уравнению соответствует часть параболы, а именно – те ее точки, для которых $y\le 3$ (рис. 60). Для отыскания фокуса вспомним, что расстояние от фокуса до директрисы $p=2,$ а от фокуса до вершины $\dfrac{p}{2}=1.$ Так как вершина $M_0(2,3)$, то фокус $F(1,3).$

Пример 3.10. Записать уравнение параболы, если ее фокус $F(-2,3),$ а уравнение директрисы $y=-1.$

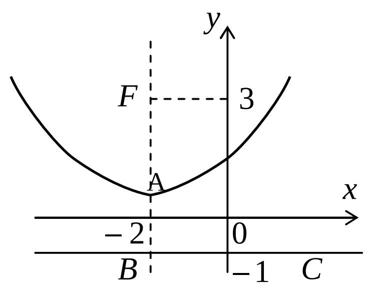


Рис. 61

Решение. Построим фокус и директрису параболы. Ось симметрии параболы проходит через фокус F перпендикулярно директрисе BC (рис.61), а вершина A лежит на оси симметрии посередине между фокусом и директрисой. Следовательно, $\quad x_A=x_F=-2, \quad y_A=\dfrac{y_F+y_B}{2}=\dfrac{3-1}{2}=1.$

Так как ось симметрии параболы параллельна оси oy, то уравнение параболы имеет вид: $(x-x_A)^2=\pm 2p(y-y_A).$ Ветви параболы направлены в положительную сторону оси oy, поэтому выбираем в ее уравнении знак «+». Параметр p равен расстоянию между фокусом и директрисой, т.е. $p = 3-(-1) = 4.$ Окончательно уравнение параболы примет вид: $(x+2)^2 = 8(y-1).$

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Привести уравнение линии $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 36$ к каноническому виду и построить линию. Найти межфокусное расстояние. Записать уравнение асимптот.

Ответ: $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1;\ \ 2c = 2\sqrt{13};\ \ y+3 = \pm\dfrac{3}{2}(x-2).$

Пример. Установить, часть какой линии задает уравнение:

а) $y = 1 - \dfrac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2};$ б) $x = 2 + \sqrt{6-2y}.$

Ответ: а) нижняя часть эллипса, б) правая часть параболы.

Пример. Записать уравнение параболы, если ее фокус $F(-2{,}3),$ а уравнение директрисы $x = 4.$ Ответ: $(y-3)^2 = -12(x-1).$

3.4. Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка описываются уравнениями второго порядка относительно переменных $x, y, z.$ К поверхностям обращаются при изучении физики, механики, деталей машин, в системах автоматизированного проектирования.

Среди поверхностей второго порядка выделим ***цилиндрические поверхности.*** Цилиндрической поверхностью называется поверхность, состоящая из параллельных прямых (образующих), пересекающих некоторую линию (направляющую).

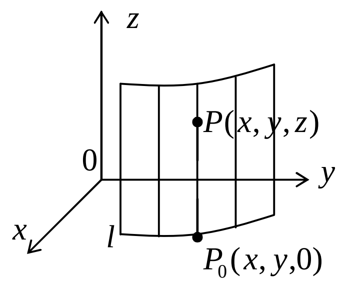


Рис. 62

Рассмотрим цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси oz, а направляющая l лежит в плоскости xoy и имеет уравнение $F(x, y) = 0$ (рис. 62). Рассмотрим произвольную точку $P(x, y, z)$ на поверхности. Ее проекция $P_0(x, y, 0)$ на плоскость xoy лежит на кривой l. Поэтому координаты точки P_0 удовлетворяют уравнению кривой $F(x, y) = 0$. Этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки P, так как в уравнении не содержится z.

Справедливо и обратное: уравнение $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси oz, и направляющей, которая в плоскости xoy имеет уравнение $F(x, y) = 0$.

Аналогично, если в уравнении отсутствует y (или x), то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси oy (или ox).

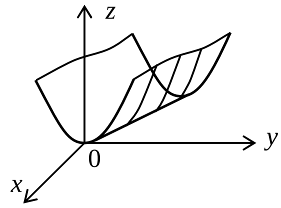


Рис. 63

Пример 3.11. Построить поверхность с уравнением $z = y^2$.

Решение. В уравнении отсутствует x, значит, уравнение определяет цилиндрическую поверхность, с образующими параллельными оси ox. Направляющая в плоскости yoz имеет уравнение $z = y^2$, т.е. является параболой с вершиной в начале координат и осью симметрии oz (рис. 63).

Пример 3.12. Построить поверхность $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$

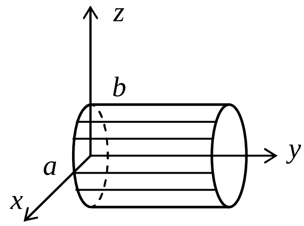


Рис. 64

Решение. В уравнении отсутствует y, значит, уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси oy. Направляющая в плоскости xoz имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$ то есть является эллипсом (рис. 64).

Следующие поверхности также являются цилиндрическими: а) $z^2 + y^2 = 4$; б) $y = x^2$; в) $z^2 - x^2 = 1$. Их построение разберите самостоятельно (рис.65):

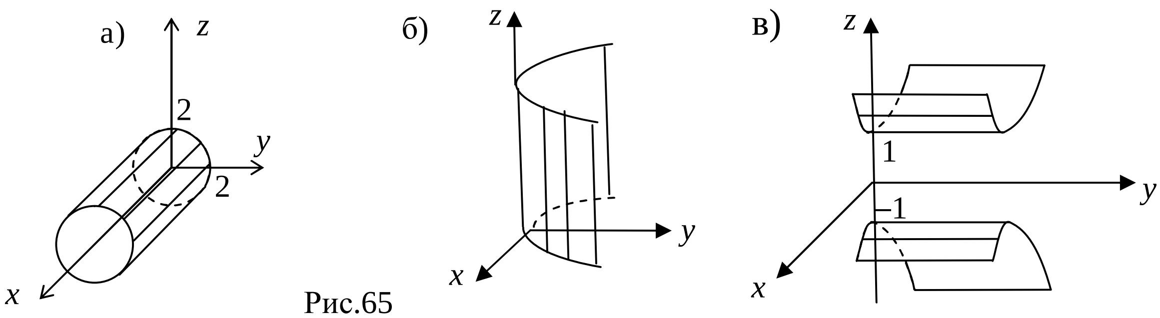


Рис.65

Кроме цилиндрических поверхностей есть и другие поверхности второго порядка. Их уравнения содержат все три переменные $x, y, z.$ Наиболее важные из них:

1) эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$
2) коническая поверхность	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2};$
3) параболоид	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$
4) однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$
5) двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$

Построение этих поверхностей по их уравнениям основано на методе сечений, т.е. на построении сечений данной поверхности координатными плоскостями или параллельными им плоскостями. Поясним метод сечений на примерах.

Пример 3.13. Построить поверхность с уравнением $z^2 = x^2 + y^2$.

Решение. Так как уравнение поверхности содержит все три переменные, то построим поверхность методом сечений. При $x=0$ (сечение плоскостью yoz) исходное уравнение примет вид: $z^2=y^2$, или $z=\pm y$. Эти уравнения определяют пару прямых в плоскости yoz (рис. 66). При $z=0$ (сечение плоскостью xoy) исходное уравнение примет вид: $x^2+y^2=0$. Оно определяет единственную точку $O(0{,}0)$. Поэтому рассмотрим дополнительные сечения плоскостями $z=\pm h$. Эти сечения имеют уравнения $x^2+y^2=h^2$, т.е. являются окружностями в плоскостях $z=h$ и $z=-h$. В итоге получили конус.

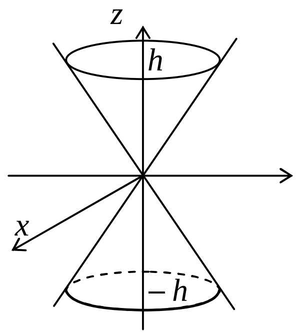


Рис. 66

Пример 3.14. Построить поверхность с уравнением $x^2+y^2-z^2=-1$.

Решение. Уравнение поверхности содержит все три переменные, поэтому применим метод сечений. Сечение поверхности плоскостью $x=0$ (плоскостью yoz) имеет уравнение $y^2-z^2=-1$. Это уравнение определяет гиперболу в плоскости yoz. Для определения вершин гиперболы положим $y=0$ и получим $z=\pm 1$ (рис. 67). Сечение поверхности плоскостью $z=0$ имеет уравнение $x^2+y^2=-1$, которому не удовлетворяет ни одна пара чисел (x,y), так как всегда $x^2+y^2\geq 0$. Поэтому берем дополнительные сечения $z=\pm 2$ и получаем уравнение $x^2+y^2=3$, которое определяет окружности в плоскостях $z=2$ и $z=-2$. Полученная поверхность называется двуполостным гиперболоидом.

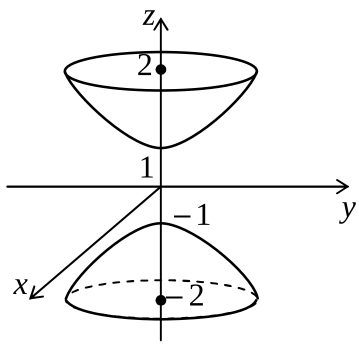


Рис. 67

Построение методом сечений следующих поверхностей разберите самостоятельно (рис.68):

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; б) $z=x^2+y^2$; в) $x^2+y^2-z^2=1$.

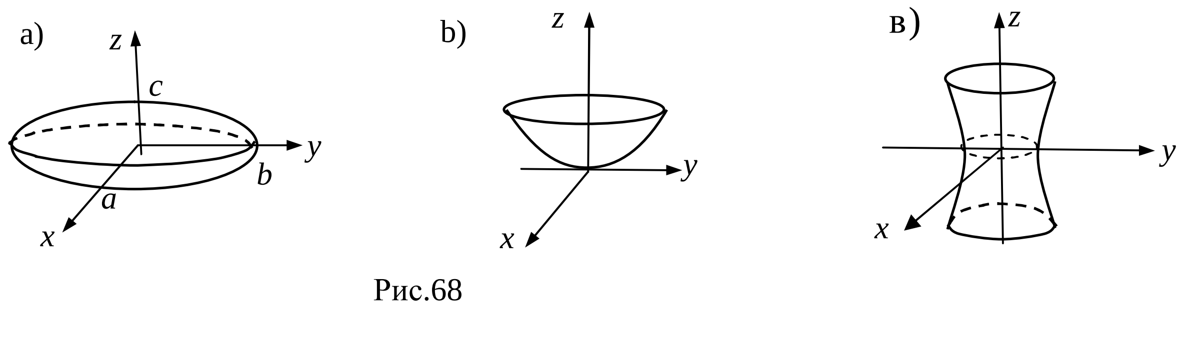


Рис.68

4. Комплексные числа

4.1. Определение, изображение, формы записи

К понятию комплексного числа привело стремление решить уравнение $x^2+1=0$ и извлечь корень из отрицательного числа.

Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где x,y – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, $i^2=-1$.

Числа $x,\ y$ называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z,\quad y = \operatorname{Im} z.$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то $x + i0 = x$ есть действительное число.

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части, т.е.

$$\boxed{x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.}$$

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой M плоскости с координатами x, y или ее радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 69). Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r: $|z| = r = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

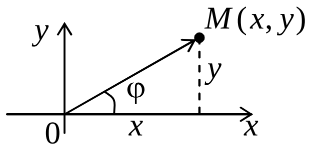


Рис. 69

Угол φ между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси ox называют аргументом комплексного числа z. Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$; договоримся брать то значение φ, которое заключено между $-\pi$ и π и обозначать его $\arg z.$

Наряду с ***алгебраической формой*** $z = x + iy$ комплексного числа рассмотрим еще две формы записи.

Так как $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$ (рис.69), то комплексное число $z = x + iy$ можно записать в ***тригонометрической форме:*** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Введя функцию $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексное число можно записать в ***показательной форме:*** $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Итак, имеем три формы записи комплексного числа:

$$\boxed{z = x + iy;\quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad z = r \cdot e^{i\varphi}.}$$

Пример 4.1. Записать комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы записать z в тригонометрической форме, найдем его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2;$$

для правильного отыскания аргумента рекомендуем изобразить число z на плоскости (рис. 70). Найдем сначала острый угол φ_1,

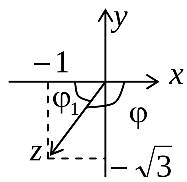


Рис. 70

дополнительный к углу φ: $tg\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{1},\ \varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда $\varphi = -\pi + \varphi_1 = -\dfrac{2\pi}{3}$ и тригонометрическая и показательная формы записи числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ будут следующие:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

4.2. Действия над комплексными числами

Операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел определяются следующим естественным образом.

1). ***При сложении (вычитании)*** двух комплексных чисел складываются (соответственно вычитаются) их действительные и мнимые части, т.е.

$$\boxed{z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}. \qquad (4.1)$$

С геометрической точки зрения сложение (вычитание) комплексных чисел равносильно сложению (вычитанию) изображающих их векторов (рис.71). Отметим, что расстояние между комплексными точками z_1 *и* z_2 равно $|z_1-z_2|$. Поэтому окружность с центром в точке z_0 радиуса R имеет уравнение $|z-z_0|=R$.

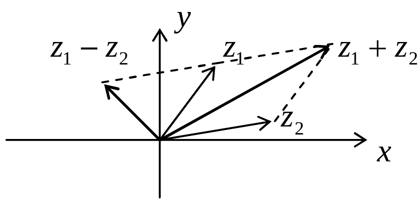


Рис. 71

2). ***Умножение*** двух комплексных чисел в алгебраической форме определяется по правилам умножения двучленов с учетом равенства $i^2=-1$:

$$\boxed{z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}. \qquad (4.2)$$

Например, $(2+i)\cdot(3-4i)=6+3i-8i-4i^2=10-5i$.

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме получим: $z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$$=r_1\cdot r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right]=$$

$$=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].$$

Следовательно, $$\boxed{|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \quad \arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2}. \qquad (4.3)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

3). ***Деление*** комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, т.е. $z=\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z\cdot z_2=z_1$. Практически, при делении двух комплексных чисел в алгебраической форме нужно числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2\neq 0)$ умножить на число, сопряженное знаменателю; тогда делителем будет действительное число:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\cdot(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i\,(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}}. \qquad (4.4)$$

Например,

$$\frac{2+5i}{7+3i}=\frac{(2+5i)\cdot(7-3i)}{(7+3i)\cdot(7-3i)}=\frac{14-15i^2+35i-6i}{49-9i^2}=\frac{29+29i}{49+9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

При делении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]}. \qquad (4.5)$$

4). ***Возведение в степень*** комплексного числа в алгебраической форме осуществляется по правилам возведения в степень двучлена с учетом того, что $i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=1$ и т.д. Например, используя формулу для куба разности, получим: $(2-i)^3=2^3-3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2-i^3=8-12i-6+i=2-11i.$

При возведении комплексного числа z в большую степень удобно использовать его тригонометрическую форму $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$. Учитывая, что при умножении модули умножаются, а аргументы складываются, получим формулу Муавра:

$$\boxed{z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{in\varphi}}\ . \qquad (4.6)$$

Пример 4.2. Вычислить z^6, если $z=\sqrt{3}+i.$

Решение. Изобразим комплексное число z на плоскости (рис. 72), найдем его модуль и аргумент:

$$|z|=r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

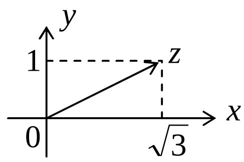


Рис. 72

Тогда $z^6=r^6(\cos 6\varphi+i\sin 6\varphi)=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-64.$

5). ***Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа*** является действием, обратным возведению в степень, т.е. $\sqrt[n]{z}=w,$ если $w^n=z$.

При извлечении корня из комплексного числа z удобно использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. Так как $w^n=z,$ то

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

У равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, то есть

$$\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2\pi k\quad \text{или}\quad \rho=\sqrt[n]{r},\ \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

Подставляя эти значения в выражение $\sqrt[n]{z}=w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$ получим:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\\ k=0,1,2,\ldots,n-1.\end{gathered}}\ . \qquad (4.7)$$

Придавая k значения $0, 1, 2,\ldots,n-1$, получим n различных значений корня n–й степени из комплексного числа. При других значениях k получим значения корня, совпадающие с уже найденными. Например, при $k=n$ и при $k=0$ значения корней совпадают:

$$w_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = w_0 .$$

Аналогично, $w_{n+1} = w_1$, $w_{n+2} = w_2, \dots$. Итак, для любого $z \neq 0$

корень степени n из числа z имеет n различных значений.

Пример 4.3. Решить уравнение $z^3 + 1 = 0$.

Решение. Из уравнения имеем $z = \sqrt[3]{-1}$. Найдем модуль и аргумент числа −1: $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. Тогда корни уравнения имеют вид:

$$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2$, получим три корня уравнения:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

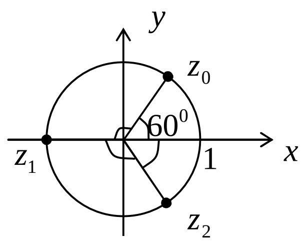


Рис. 73

Эти корни лежат на единичной окружности и делят ее на три равных части (рис. 73).

Если нужно извлечь корень квадратный, то можно и не пользоваться формулой (4.7). Например,

$$\sqrt{12i-5} = \sqrt{12i-9+4} = \sqrt{12i+(3i)^2+2^2} = \sqrt{(2+3i)^2} = \pm(2+3i).$$

Если вы не догадались о таком способе, то можно обозначить $\sqrt{12i-5} = x+iy$ и возвести это равенство в квадрат: $12i - 5 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$.

Приравнивая действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{6^2}{x^2} = -5 \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

Действительные корни получившегося биквадратного уравнения $x = \pm 2$. Тогда $y = \pm 3$ и $z = x + iy = \pm(2+3i)$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример. Выполнить указанные действия:

а) $\frac{1-i}{1+i}$, б) $\frac{2}{1-3i}$, в) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$, г) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$, д) $\sqrt[3]{i}$, е) $\sqrt{3-4i}$.

Указание: в п. г), д) представить комплексное число в тригонометрической форме, затем применить формулы (4.6), (4.7).

Ответы: а) $-i$, б) $\frac{1+3i}{5}$, в) -8, г) -64, д) $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$; i, е) $\pm(2-i)$.

Пример. Решить квадратные уравнения:

а) $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$, б) $z^2 - (2+i)z + 7i - 1 = 0$.

Ответы: а) $2i$; -1, б) $3-i$, $-1+2i$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.1. 288 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 352 с.
5. Высшая математика /под редакцией Яковлева Г.Н. М.: Высшая школа, 2004. 584с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука, 1996. 464 с.

Учебно-методическое издание

Ревекка Максовна Минькова

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подисано в печать 26. 04. 2005 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 2,44
Уч.-изд. л. 2,3 Тираж Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
ООО «Издательство УМЦ УПИ
620002, Екатеринбург, Мира 17

Учебно-методическое издание

Ревекка Максовна Минькова

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подисано в печать 26. 04. 2005 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 2,44
Уч.-изд. л. 2,3 Тираж Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира 19