Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет-УПИ»

Р.М. Минькова

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Учебно-методическое пособие

Научный редактор доц. В.Б. Грахов

Печатается по решению
редакционно-издательского совета ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

Екатеринбург
2006

УДК 517.5: 517.28 (075.8)
ББК 22.161.я73
М 62

Рецензенты:
кафедра высшей математики Уральского государственного экономического университета (зав. кафедрой проф., канд. физ.-мат. наук Н.И. Чвялева);

проф., д-р физ.-мат. наук И. В. Мельникова (Уральский государственный университет им. А.М, Горького, кафедра математического анализа)

Автор Р.М. Минькова

М 62 Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебно-методическое пособие по курсу «Высшая математика» / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ−УПИ, 2006. 56 с.

ISBN 5-321-00547-8

В пособии рассмотрены основные понятия математического анализа – понятие предела, понятия производной и дифференциала функций одной переменной, общие теоремы анализа, исследование функций и построение их графиков. Приведено решение типовых задач. Предложены примеры для самостоятельного решения с ответами.

Пособие предназначено для студентов дистанционной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 11 назв. Рис.32.

УДК 517.5: 517.28 (075.8)
ББК 22.161.я73

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» и факультетом дистанционного образования

ISBN 5-321-00547-8

Оглавление

Глава 1. Предел и непрерывность функции одной переменной

Понятие предела является одним из важнейших понятий математического анализа. Основные понятия математического анализа, такие как производная, интеграл, связаны с предельным переходом.

Для сокращения записи мы будем использовать символы $\forall$ - любой и $\exists$ - существует. Запись $x \in X : \alpha$ означает « для всякого элемента $x \in X$ имеет место предложение α ». Запись $\exists\ y \in Y :\ \beta$ означает «существует элемент $y \in Y$, для которого имеет место предложение β ». Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает « из предложения α следует предложение β ». Запись $\alpha \ \Leftrightarrow \beta$ означает, что α и β эквивалентны.

1. Определение предела

Для изучения пределов используются понятие окрестности точки.

1.1. Окрестности конечной точки и бесконечности

1). δ *-окрестность конечной точки* x_0 обозначим $S_\delta(x_0)$ и определим как множество действительных чисел $x \in R$ таких, что $|x - x_0| < \delta$ (рис.1):

$$S_\delta(x_0) = \{x \in R : |\, x - x_0 \,| < \delta\}.$$

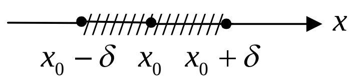

Рис.1

2). δ *-окрестность бесконечности* обозначим $S_\delta(\infty)$ и определим как множество действительных чисел $x \in R$ таких, что $|x| > \delta$ (рис.2). Таким образом,

$$S_\delta(\infty) = \{x \in R : \quad |x| > \delta\}\,.$$

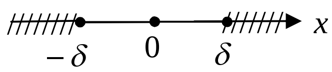

Рис.2

3). δ *-окрестность плюс бесконечности* определим (рис.3) как

$$S_\delta(+\infty) = \{x \in R :\ x > \delta\}.$$

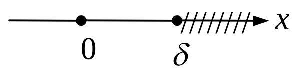

Рис.3

4). δ *-окрестность минус бесконечности* определим (рис. 4) как

$$S_\delta(-\infty) = \{x \in R :\ x < -\delta\}\,.$$

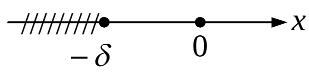

Рис.4

5). Наряду с понятием окрестности введём понятие *выколотой окрестности* $\overset{\circ}{S}_\delta(x_0)$ точки x_0, которая получается из окрестности $S_\delta(x_0)$ удалением точки x_0:

$$\overset{\circ}{S}_\delta(x_0) = S_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in R : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Дополнительно будем полагать, что

$$\overset{\circ}{S}_\delta(\infty) = S_\delta(\infty)\,, \quad \overset{\circ}{S}_\delta(+\infty) = S_\delta(+\infty)\,, \quad \overset{\circ}{S}_\delta(-\infty) = S_\delta(-\infty)\,.$$

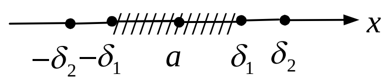

Рис.5

6). Рассмотрим *пересечение окрестностей.*

Для конечной точки *a* имеем:

$$S_{\delta_1}(a) \cap S_{\delta_2}(a) = S_\delta(a), \text{ где } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \text{ (рис 5).}$$

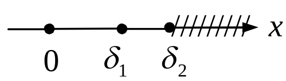

Рис.6

В случае, если $a = \infty$, или $a = +\infty$, или $a = -\infty$, имеем:

$$S_{\delta_1}(a) \cap S_{\delta_2}(a) = S_\delta(a), \text{ где } \delta = \max\{\delta_1, \delta_2\} \text{ (рис. 6 для } a = +\infty).$$

Аналогичным образом определяется и пересечение выколотых окрестностей.

1.2. Предел функции

Рассмотрим функцию $f(x)$ и предположим, что аргумент x стремится к числу a $(x \to a)$. Если ***для всех x, достаточно близких к*** a, соответствующие ***значения функции*** $f(x)$ ***как угодно близки к числу*** b, то число b называют пределом функции $f(x)$ при $x \to a$; записывают это следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Требуется сделать ряд уточнений.

1). Выражение "значения $f(x)$ *как угодно близки* к b" означает, что значения $f(x)$ попадают в *произвольную* ε*-окрестность* точки b, то есть $f(x) \in S_\varepsilon(b)$ для любого $\varepsilon > 0$.

2). Выражение "x, *достаточно близких* к a" означает, что значения аргумента x взяты из *достаточно малой* δ*-окрестности* a, то есть *найдётся* $\delta > 0$ такое, что $x \in S_\delta(a)$, причём для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся своё $\delta > 0$, т.е. δ зависит от ε.

3). Функция $f(x)$ может быть не определена в точке a, поэтому рассматриваются значения x, близкие к a, но не равные a, то есть рассматриваются x *из выколотой окрестности точки* a. Например, функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ не определена при $x = 3$, но в выколотой окрестности точки $x = 3$ (при $x \neq 3$) имеем:

$$f(x) = \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3} = x + 3 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6.$$

С учетом этих уточнений дадим точное определение предела функции.

> Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε найдётся положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что значения функции $f(x)$ принадлежат ε-окрестности точки b для всех x из выколотой δ-окрестности точки a.

Это определение распространяется и на случаи, когда a и (или) b – "несобственные числа" $+\infty, -\infty, \infty$. В дальнейшем это определение будем записывать кратко с помощью символов следующим образом.

> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b,$ если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \in S_\varepsilon(b)$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$.

Рассмотрим более подробно несколько случаев.

1). Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, a и b – конечные числа (рис.7). Тогда

$f(x) \in S_\varepsilon(b)$ означает, что $|f(x) - b| < \varepsilon$;

$x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$ означает, что $0 < |x - a| < \delta$

и определение предела принимает вид:

> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b,$ если для $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ такое, что
> $|f(x) - b| < \varepsilon$, как только $0 < |x - a| < \delta$.

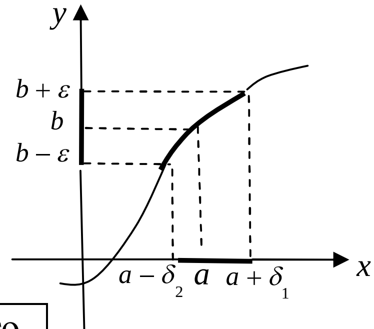

Рис.7

2). Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b,\quad b$ – конечное (рис.8). Тогда

$f(x)\in S_\varepsilon(b)$ означает, что $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$;

$x\in S_\delta(\infty)$ означает, что $|x|>\delta$,

и определение предела принимает вид:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=b, \text{ если для } \forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \text{ такое, что } \left|f(x)-b\right|<\varepsilon, \text{ как только } |x|>\delta.}$$

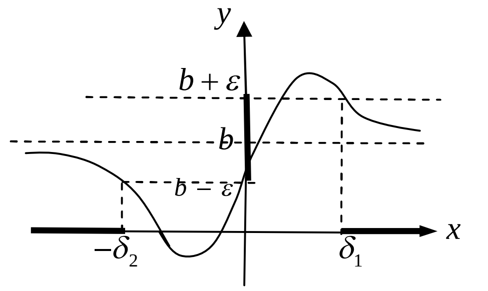

Рис.8

3). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty,\quad a$ – конечное (рис.9). Тогда

$f(x)\in S_\varepsilon(-\infty)$ означает, что $f(x)<-\varepsilon$;

$x\in S_\delta(a)$ означает, что $0<|x-a|<\delta$,

и определение предела принимает вид:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=-\infty, \text{ если для } \forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \text{ такое, что } f(x)<-\varepsilon, \text{ как только } 0<|x-a|<\delta.}$$

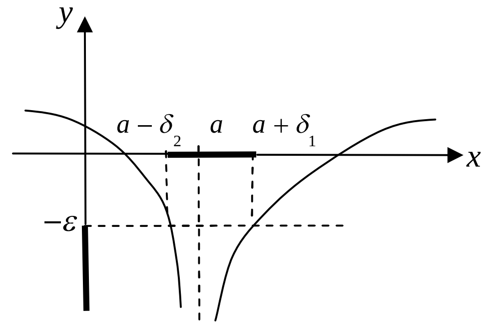

Рис.9

Другие возможные случаи (например $a=-\infty,\quad b$ – конечное ; $a=b=+\infty$) рассматриваются аналогично.

1.3. Предел последовательности

Числовая последовательность – это значения u_n функции натурального аргумента $f(n)$, расположенные в порядке возрастания аргумента:

$$u_1=f(1),\quad u_2=f(2),\ \ldots,\ u_n=f(n),\ \ldots$$

Другое обозначение последовательности: $\{u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots\}=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Примеры последовательностей:

$$1)\ \left\{-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty},\quad 2)\ \left\{\frac{3}{4},\frac{5}{9},\frac{7}{14},\ldots\right\}=\left\{\frac{2n+1}{5n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Предел последовательности можно рассматривать как частный случай предела функции, а именно функции натурального аргумента $f(n)=u_n$ при $n\to+\infty$ (обычно пишут $n\to\infty$), т.е.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n=b, \text{ если для } \forall\varepsilon>0\ \exists N>0 \text{ такое, что } u_n\in S_\varepsilon(b) \text{ для } \forall n>N.}$$

Если предел последовательности существует и конечен, то последовательность называют сходящейся. Если предел последовательности не существует или бесконечен, то её называют расходящейся. Например, последовательность $u_n=(-1)^n$ является расходящейся, так как члены последовательности с чётными номерами $u_{2n}=1$, а члены последовательности с нечётными номерами $u_{2n+1}=-1\quad (n=1,2,3,\ldots)$, т.е. не существует числа, к которому бы неограниченно приближались все члены последовательности по мере возрастания n.

1.4. Односторонние пределы функции

Пусть a – конечное число. В определении предела функции аргумент x стремится к a любым способом: колеблясь около a, оставаясь меньше a или больше a. Иногда важен способ приближения x к a: слева $(x < a)$ или справа $(x > a)$. Тогда вводят понятие левостороннего предела $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и правостороннего предела $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ следующим образом:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b, \text{ если для } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ такое, что } f(x) \in S_{\varepsilon}(b) \text{ для } \forall\, x \in \overset{\circ}{S}_{\delta}(a), \quad x < a;$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b, \text{ если для } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ такое, что } f(x) \in S_{\varepsilon}(b) \text{ для } \forall\, x \in \overset{\circ}{S}_{\delta}(a), \quad x > a.$$

Сформулируем очевидное утверждение:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.}$$

Пример 1.1. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. При $x > 0$ имеем: $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ и, значит, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1.$

При $x < 0$ имеем: $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ и, значит, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1.$

Так как левосторонний и правосторонний пределы функции различны, то предел функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ при $x \to 0$ не существует.

2. Теоремы о функциях, имеющих конечный предел

Пусть a – число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Теорема 2.1 **(*о единственности предела*).**
Если существует конечный предел функции при $x \to a$, то он единственен.

Доказательство этой и ряда других теорем не приводим.

Теорема 2.2 **(*об ограниченности функции, имеющей конечный предел*).**
Если функция имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой выколотой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$. Отсюда

$$|f(x)| = \left|\big(f(x) - b\big) + b\right| \le |f(x) - b| + |b| < \varepsilon + |b| \text{ для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta}(a).$$

Это означает, что в выколотой окрестности $\overset{\circ}{S}_{\delta}(a)$ функция $f(x)$ ограничена числом $\varepsilon + |b|$.

Теорема 2.3 (о предельном переходе в неравенстве).
Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Если $f(x)\geq c$ в некоторой выколотой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq c$.
Если $f(x)\leq c$ в некоторой выколотой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq c$.

Теорема 2.4 (***о промежуточной функции***).
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b$ и $f_1(x)\leq g(x)\leq f_2(x)$ в некоторой выколотой окрестности точки a. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$.

Теорема 2.5 (о пределе суммы, произведения, частного).
Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$,
2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$,
3) $\lim\limits_{x\to a}[k\cdot g(x)]=k\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$,
4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Доказательство проведем для одного из утверждений, например для первого.
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, причем эти пределы конечны.
Требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+c.$
Воспользуемся определением предела функции:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\Rightarrow$ для $\forall\varepsilon>0$, а значит, и для $\dfrac{\varepsilon}{2}>0\ \exists\delta_1>0$: $|f(x)-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$;

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=c\Rightarrow$ для $\forall\varepsilon>0$, а значит и для $\dfrac{\varepsilon}{2}>0\ \ \exists\delta_2>0$: $|g(x)-c|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)\cdot$

Два неравенства $|f(x)-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $|g(x)-c|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняются одновременно в общей части двух окрестностей $\overset{\circ}{S}_\delta(a)=\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)\bigcap\overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$. Поэтому для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_\delta(a)$ следует:

$$|(f(x)+g(x))-(b+c)|\leq|f(x)-b|+|g(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ .$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+c.$

Для формулировки теоремы о пределе элементарной функции отметим, что элементарная функция получается из основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрической, обратных тригонометрических) с помощью арифметических операций и суперпозиции.

Теорема 2.6 (***о пределе элементарной функции***).

Пусть элементарная функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Доказательство этой теоремы не приводим. Теорему нужно сначала доказать для основных элементарных функций, а затем воспользоваться теоремой 2.5. Для примера выберем из основных элементарных функций $\sin x$ и покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$: $\quad |\sin x - \sin x_0| = 2\cdot\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right| \le 2\cdot\dfrac{|x-x_0|}{2}\cdot 1 = |x-x_0| < \varepsilon.$

Следовательно, для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\varepsilon$: $\quad |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ как только $|x-x_0|<\delta$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

Пример 2.1. Вычислить предел функции $g(x) = \dfrac{x^4 - x^3\lg x + \sin\pi x + 5}{x^2 - 2^x + 2}$ при $x \to 1$.

Решение. Функция $g(x)$ является элементарной и определена при $x=1$. Поэтому

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^4 - x^3\lg x + \sin\pi x + 5}{x^2 - 2^x + 2} = \frac{1-\lg 1 + \sin\pi + 5}{1-2+2} = 6.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти пределы $\quad$ 1) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2+\sqrt{x-3}}{x^2-40}$, $\quad$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + 3\cos x}{x+1}$.

Ответы: 1) $\dfrac{4}{9}$, 2) 3.

3. Бесконечно малые функции

3.1. Определение и основные свойства

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Рассмотрим ряд свойств бесконечно малых функций.

Теорема 3.1 (о связи функции с ее конечным пределом).

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

Доказательство. 1). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Рассмотрим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$.

Вычислим ее предел: $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}[f(x)-b] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - b = b - b = 0$.

Так как $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x\to a$ и $f(x) = b + \alpha(x)$.

2). В обратную сторону, пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}[b+\alpha(x)] = b + \lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = b + 0 = b.$

Теорема 3.2 (***о произведении бесконечно малой функции на ограниченную***). Пусть функция $\alpha(x)$ − бесконечно малая при $x \to a$, а функция $f(x)$ − ограничена в некоторой выколотой окрестности точки a. Тогда произведение этих функций $\alpha(x)\cdot f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$, т.е. $|f(x)| \le M$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$. Кроме того, функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0.$ Поэтому для $\forall \varepsilon > 0$, а значит и для $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется $\delta_2 > 0$ такое, что $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$. Оба неравенства $|f(x)| \le M$ и $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ выполняются в окрестности $\overset{\circ}{S}_{\delta}(a) = \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a) \cap \overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$. Поэтому

$$|\alpha(x)\cdot f(x)| = |\alpha(x)|\cdot|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon \quad \text{для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta}(a).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\alpha(x)] = 0,$ т.е. функция $\alpha(x)\cdot f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Пример 3.1. Будет ли бесконечно малой при $x \to 0$ функция $f(x) = x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

Решение. Функция x является бесконечно малой при $x \to 0$, а функция $\sin\dfrac{1}{x}$ – ограниченной в выколотой окрестности точки $x = 0$. Поэтому по теореме 3.2 функция $f(x) = x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Теорема 3.3 (***о сумме, разности, произведении бесконечно малых***). Сумма, разность, произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}[\alpha(x)+\beta(x)] = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) = 0+0 = 0,$$

$$\lim_{x\to a}[\alpha(x)\cdot\beta(x)] = \lim_{x\to a}\alpha(x)\cdot\lim_{x\to a}\beta(x) = 0\cdot 0 = 0.$$

Это и означает, что функции $\alpha(x)+\beta(x)$ и $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$. Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа бесконечно малых функций.

3.2. Отношение бесконечно малых. Неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Рассмотрим функции $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, $\gamma = 3x$, являющиеся бесконечно малыми при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 3,$$

то предел отношения двух бесконечно малых функций может быть любым; его называют неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Отыскание предела в случае неопределенности называют раскрытием неопределенности.

Пример 3.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{x^2-6x+5}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x=1$ обращаются в ноль, поэтому имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель разложим на множители, причем один из множителей уже известен – это $(x-1)$. Поделив на него многочлен, стоящий в числителе, получим и другой множитель.

Итак, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{x^2-6x+5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\,(x^2+x-3)}{(x-1)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-3}{x-5}=\dfrac{-1}{-4}=\dfrac{1}{4}$.

Пример 3.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на $(\sqrt{1+x}+1)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

3.3. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Он является неопределенностью $\left[\frac{0}{0}\right]$. Покажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}. \tag{3.1}$$

Это равенство называют ***первым замечательным пределом***.

Докажем равенство (3.1). Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Так как

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

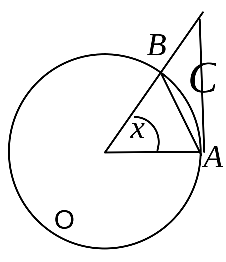

Рис.10

то функция $f(x)$ является четной, поэтому достаточно рассмотреть ее при $x>0$. Так как $x\to 0$, то достаточно взять $x<\dfrac{\pi}{2}$. Построим круг радиуса R с центром в точке O (рис.10), угол BOA, равный x радиан, треугольники OAB, OAC и сектор OAB. Очевидно, что

$$S_{\Delta OAB}<S_{сект.OAB}<S_{\Delta OCA}\ ,\ \text{ или }\ \frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2\,x<\frac{1}{2}R\cdot R\ \mathrm{tg}\,x,\ \text{ или }\ \sin x<x<\mathrm{tg}\,x.$$

Поделив на $\sin x$ ($\sin x>0$, так как $0<x<\pi/2$), получим:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, то по теореме о пределе промежуточной функции имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Следствие. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1, \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1, \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.}$

Доказательство. 1). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.\cdot$

2). Для отыскания $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ сделаем замену $\arcsin x=y$.

Тогда $x=\sin y$ и $y=\arcsin x\to 0$ при $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

3). Для отыскания $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ аналогично следует сделать замену $\operatorname{arctg} x=y$.

3.4. Сравнение бесконечно малых

Бесконечно малые функции часто сравнивают между собой по «быстроте» стремления к нулю. Так, например, из двух функций $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^{10}$ бесконечно малых при $x\to 0$ функция x^{10} стремится к нулю «быстрее», чем x. Уточним, какой смысл вкладывается в слово «быстрее».

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$.

1). Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ конечен и отличен от нуля, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***бесконечно малыми одного порядка*** и обозначают так: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x\to a$.

В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***эквивалентными бесконечно малыми*** и обозначают так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

2). Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называют ***бесконечно малой более высокого порядка,*** чем $\beta(x)$ и обозначают так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

3). Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$ и $\beta(x)$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x\to a$.

4). Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***несравнимыми*** бесконечно малыми при $x\to a$.

Пример 3.4. Функции x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$, т.е.

$$\boxed{\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x \quad \text{при } x \to 0.}$$

Это вытекает из первого замечательного предела и его следствия.

Пример 3.5. Сравнить при $x \to 0$ бесконечно малые $\alpha(x) = 1 - \cos 6x$ и $\beta(x) = x^2$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 3x}{\frac{1}{9}\cdot(3x)^2} = 18 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 18.$

Следовательно, функции $1-\cos 6x$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 0$.

Для нахождения пределов важна следующая теорема.

Теорема 3.4 ***(об эквивалентных бесконечно малых).***

Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$

Доказательство. Так как $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1,$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$ Запишем равенство $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$ и перейдем в нем к пределу:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 3.6. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(5x - x^3)\cdot(1-\cos x)}{\arcsin^3(2x)}$.

Решение. Имеем неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для их раскрытия заменим бесконечно малые функции на эквивалентные:

а) так как $\operatorname{arctg} 5x \sim 5x, \quad \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3};$

б) так как $\operatorname{tg}(5x - x^3) \sim 5x - x^3,\ 1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{2},\ \arcsin^3 2x \sim (2x)^3$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(5x - x^3\right)\cdot\left(1-\cos x\right)}{\arcsin^3 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(5-x^2\right)\cdot\frac{x^2}{2}}{8x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5-x^2}{16} = \frac{5}{16}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg} 3x)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (сделать замену переменной $1 - x = t$).

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$, 2) 2, 3) $\sqrt{2}$, 4) $\frac{2}{\pi}$.

4. Бесконечно большие функции

4.1. Определение и основные свойства

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Различают частные случаи бесконечно больших функций, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Рассмотрим некоторые свойства бесконечно больших функций.

Теорема 4.1 (***о связи с бесконечно малой***).
Функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, значит $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Тогда из определения предела следует, что для $\forall \varepsilon > 0$, а значит и для $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ $\exists\, \delta > 0$: $|f(x)| > \varepsilon_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Поэтому $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = \dfrac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, то есть функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$. Аналогично доказывается и обратное утверждение.

Теорема 4.2 (об арифметических операциях).
1). Произведение двух бесконечно больших при $x \to a$ есть бесконечно большая при $x \to a$.
2). Произведение бесконечно большой при $x \to a$ на функцию, имеющую ненулевой предел при $x \to a$, есть бесконечно большая при $x \to a$.
3). Отношение бесконечно большой при $x \to a$ к бесконечно малой (отличной от нуля) при $x \to a$ есть бесконечно большая при $x \to a$.
4). Сумма двух бесконечно больших одного знака при $x \to a$ есть бесконечно большая того же знака при $x \to a$.

Доказательство проведем для утверждений 1) и 3).

1). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to a$. Тогда $\dfrac{1}{f(x)}$, $\dfrac{1}{g(x)}$ есть бесконечно малые при $x \to a$. Значит и их произведение $\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$. Поэтому из теоремы 4.1 следует, что $f(x) \cdot g(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$.

3). Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая и произведение двух бесконечно больших $f(x) \cdot \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x \to a$.

Пример 4.1. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$, $(a_0\neq 0)$.

Решение. а). При $x\to 1$ функция $x-1$ является бесконечно малой, а функция $\dfrac{1}{x-1}$ – бесконечно большой. Произведение бесконечно большой функции $\dfrac{1}{x-1}$ на функцию x, имеющую ненулевой предел при $x\to 1$, есть бесконечно большая функция. Значит, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty.$

б). Функция $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}\right)$ при $x\to\infty$ есть произведение бесконечно большой x^n и функции $a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}$, имеющей при $x\to\infty$ ненулевой предел a_0. Поэтому функция $P_n(x)$ есть бесконечно большая при $x\to\infty$.

4.2. Неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty\cdot 0]$, $[\infty-\infty]$

Рассмотрим функции $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=3x$, $f_4(x)=x+1$. Эти функции являются бесконечно большими при $x\to\infty$, а функции $\alpha_1(x)=\dfrac{1}{f_1(x)}$, $\alpha_2(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$.

1). Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_3(x)}{f_1(x)}=k$, то предел отношения двух бесконечно больших функций может быть любым; его называют неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

2). Так как $\lim\limits_{x\to\infty}f_2(x)\cdot\alpha_1(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}f_3(x)\cdot\alpha_1(x)=k,$ то предел произведения бесконечно большой функции на бесконечно малую может быть любым; его называют неопределенностью вида $[\infty\cdot 0]$.

3). Так как $\lim\limits_{x\to\infty}[f_3(x)-f_1(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}(k-1)x=\infty\ (k\neq 1),\quad \lim\limits_{x\to\infty}[f_4(x)-f_1(x)]=1$, то предел разности двух бесконечно больших функций может быть любым; его называют неопределенностью вида $[\infty-\infty]$.

Рассмотрим некоторые способы раскрытия неопределенностей.

Пример 4.2. Найти предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$.

Решение. В примере 4.1 было установлено, что многочлены являются бесконечно большими функциями при $x\to\infty$, значит предел их отношения есть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия неопределенности сделаем преобразования:

$$\frac{P_n(x)}{Q_k(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k}=\frac{x^n\cdot\left(a_0+a_1/x+\ldots+a_n/x^n\right)}{x^k\cdot\left(b_0+b_1/x+\ldots+b_k/x^k\right)}\qquad\begin{pmatrix}a_0\neq 0\\ b_0\neq 0\end{pmatrix}.$$

Функция $\dfrac{a_0+a_1/x+\ldots+a_n/x^n}{b_0+b_1/x+\ldots+b_k/x^k}$ имеет ненулевой предел $\dfrac{a_0}{b_0}$. Функция $\dfrac{x^n}{x^k}$ есть бесконечно большая при $n>k$, бесконечно малая при $n<k$ и равна единице при $n=k$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k}=\begin{cases}\infty, & n>k,\\ 0, & n<k,\\ a_0/b_0, & n=k,\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n}{b_0x^k}=\begin{cases}\infty, & n>k,\\ 0, & n<k,\\ a_0/b_0, & n=k.\end{cases}$

Следовательно,
$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^k}.}\tag{4.1}$$

Аналогично, при отыскании предела отношения иррациональных функций младшие степени можно отбросить (пример 4.5).

Пример 4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{100}-x^{63}+75}{7x^{120}+5x^{70}-100}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{100}}{7x^{120}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{7x^{20}}=0.$

Пример 4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n+3)^4}{(2n-1)^4+(n-5)^4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^4-n^4}{(2n)^4+n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^4}{17n^4}=\dfrac{15}{17}.$

Пример 4.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-1)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+x}=1.$$

Пример 4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=[\infty+\infty]=\infty.$

Здесь функции $\sqrt{x^2+2x-1}$ и $(-x)$ есть бесконечно большие одного знака и их сумма является бесконечно большой.

Примеры для самостоятельного решения

Найти пределы 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+5}{10x^3+7x-9}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^3(x+5)^5}{x^8-3x^4+9}$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Ответы. 1) ∞, 2) 8, 3) 0.

4.3. Второй замечательный предел. Неопределенность $\left[1^\infty\right]$

В математике большую роль играют следующие пределы:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e,\qquad\lim_{y\to0}(1+y)^{1/y}=e.}\tag{4.2}$$

Здесь e – иррациональное число, $e\approx2{,}7182$. Более точное вычисление числа e будет приведено далее, при рассмотрении формулы Тейлора.

Равенства (4.2) называют ***вторым замечательным пределом***. Второе из этих равенств получается из первого при замене $1/x$ на y. Вывод равенств (4.2) мы опустим.

В математике и её приложениях большую роль играют показательная функция e^x с основанием e и логарифмическая функция $\ln x = \log_e x$ с основанием e.

Пример 4.7. Найти пределы а) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

Решение. а). Пусть $y=-x$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-1/y} = \lim\limits_{y\to 0}\left[(1+y)^{1/y}\right]^{-1} = e^{-1}$,

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{1/\,2x}\right]^2 = e^2 .$$

Замечания. 1). У функций $f(x)=(1-x)^{1/x}$, $g(x)=(1+2x)^{1/x}$ основания стремятся к единице при $x\to 0$, а показатели степени – к бесконечности. Но пределы этих функций различны, поэтому их называют ***неопределенностью*** *вида* $\left[1^\infty\right]$.

2). Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$ удобно применять второй замечательный предел.

Пример 4.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5}\right)^{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$, то имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Преобразуем дробь, выделив единицу: $\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5} = \dfrac{\left(2x^2+5\right)-4}{2x^2+5} = 1+\dfrac{-4}{2x^2+5}$.

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2+5}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2x^2+5}\right)^{\frac{2x^2+5}{-4}}\right]^{\frac{-4x^2}{2x^2+5}} = e^{-2} .$$

Здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$, где $y=\dfrac{-4}{2x^2+5}$, и тем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2}{2x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2}{2x^2} = -2.$

Пример 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{7\operatorname{ctg}^2 x}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+2\sin x}\right)^{1/\sin x}$ (использовать теорему о пределе частного).

Ответы: 1) e^5; 2) e^7; 3) $1/e$.

5. Непрерывные функции

5.1. Функции, непрерывные в точке

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 5.1 (о приращении непрерывной функции).
Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в точке x_0.

Доказательство. Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, определяющее непрерывную в точке x_0 функцию, эквивалентно равенству $\lim\limits_{x-x_0\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$. Разность $x-x_0$ есть приращение аргумента Δx, а разность $f(x)-f(x_0)$ есть приращение функции $\Delta f(x_0)$. Следовательно, равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$, которое означает, что бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Теорема 5.2 (***о непрерывности суммы, произведения, частного)***.
Сумма, разность, произведение конечного числа непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в этой точке. Частное непрерывных в точке функций есть функция непрерывная в этой точке, если знаменатель в этой точке отличен от нуля.

Доказательство проведем, например, для произведения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных в точке x_0. Воспользуемся теоремой о пределе произведения, учитывая, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Получим:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0).$$

Это равенство означает, что функция $f(x)\cdot g(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 5.3 (о непрерывности элементарной функции).
Если элементарная функция определена в точке x_0 и её окрестности, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из теоремы о пределе элементарной функции $f(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

5.2. Точки разрыва функции и их классификация

Из определения функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это равенство означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности,

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ или, что равносильно, равны односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$,

3) предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0.

Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции. Выделяют следующие типы точек разрыва.

1. Если в точке разрыва x_0 существуют ***односторонние конечные пределы*** функции, то x_0 называют точкой ***разрыва первого рода***. При этом,

а) если односторонние ***пределы совпадают***, то x_0 называют точкой ***устранимого разрыва*** первого рода,

б) если односторонние ***пределы не совпадают***, то x_0 называют точкой ***конечного разрыва*** первого рода (или точкой скачка).

2. Если в точке x_0 хотя бы один из *односторонних пределов* функции ***не существует или бесконечен***, то x_0 называют точкой ***разрыва второго рода***.

На рис.11 изображены различные типы точек разрыва.

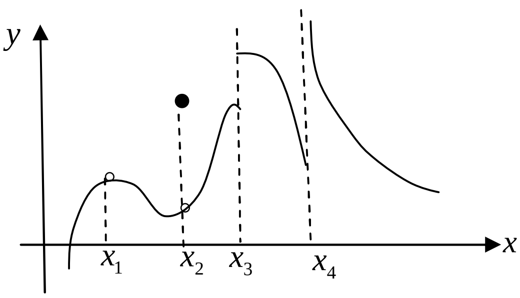

Рис.11

Точка x_1 – точка разрыва, так как $f(x)$ не определена в точке x_1; разрыв − устранимый, так как односторонние пределы совпадают. Для «устранения» разрыва в точке x_1 нужно доопределить функцию, положив $f(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$.

В точке x_2 – устранимый разрыв первого рода, так как односторонние пределы совпадают, но $f(x_2)\neq \lim\limits_{x\to x_2} f(x)$. Для «устранения» разрыва в точке x_2 нужно изменить значение функции в точке x_2, положив $f(x_2)=\lim\limits_{x\to x_2} f(x)$.

В точке x_3 – конечный разрыв первого рода (скачок), так как односторонние пределы $f(x_3-0)$, $f(x_3+0)$ конечны, но различны.

В точке x_4 – разрыв второго рода, так как правосторонний предел $f(x_4+0)=\infty$.

Пример 5.1. Установить тип точки разрыва функции $f(x)=2^{1/x}$. Построить примерный график функции.

Решение. Функция $f(x)=2^{1/x}$ не определена при $x=0$, значит $x=0$ является точкой разрыва функции. Найдем пределы:

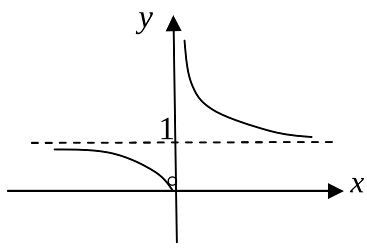

Рис.12

$$f(-0)=\lim_{x\to -0} 2^{1/x}=0, \quad \text{так как} \quad \frac{1}{x}\to -\infty \quad \text{при} \quad x\to -0,$$

$$f(+0)=\lim_{x\to +0} 2^{1/x}=\infty, \quad \text{так как} \quad \frac{1}{x}\to +\infty \quad \text{при} \quad x\to +0.$$

Так как $f(+0)=\infty$, то $x=0$ является точкой разрыва второго рода. Для построения графика функции (рис.12) воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{1/x}=2^0=1$.

Пример 5.2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases}\ln\left(5+x^2\right), & x\le 0,\\ \sin(7x^3+\pi), & x>0.\end{cases}$

Решение. Функции $\ln\left(5+x^2\right)$ и $\sin(7x^3+\pi)$ определены для любых x, являются элементарными, а значит и непрерывными. Разрыв функции может быть только в точке «стыка» $x=0$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\left[\ln(5+x^2)\right]=\ln 5,\qquad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\sin\left(7x^3+\pi\right)=\sin\pi=0.$$

Так как односторонние пределы конечны, но различны, то $x=0$ есть точка конечного разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $\ln 5$.

5.3. Функции, непрерывные на отрезке

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если

$f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0\in(a,b)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,

$f(x)$ непрерывна в точке a справа, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$,

$f(x)$ непрерывна в точке b слева, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теоремы, не приводя доказательство.

Теорема 5.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда:

1) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$,
2) функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своего наибольшего и наименьшего значения,
3) функция $f(x)$ принимает на отрезке $[a,b]$ все промежуточные значения между наибольшим и наименьшим,
4) если на концах отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется хотя бы одна точка c, в которой функция $f(x)$ принимает нулевое значение.

Эта теорема имеет наглядную иллюстрацию. На рис.13 приведен график непрерывной функции $f(x)$. Очевидно, что $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$; достигает наибольшего значения M в точке x_1, наименьшего значения m в точке x_2; для любого числа $K\in(m,M)$ найдется точка c такая, что $f(c)=K$. Так как значения

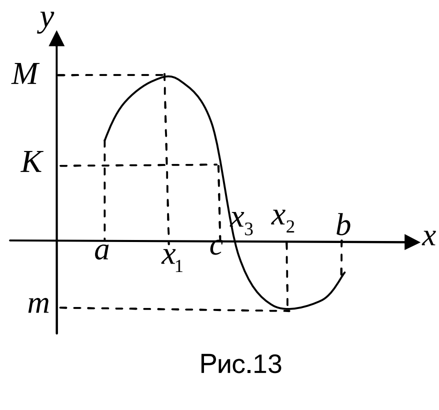

Рис.13

$f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то существует на интервале (a,b) точка x_3 такая, что $f(x_3)=0$.

Замечание. Теорема перестает быть верной для функции, непрерывной на интервале, или функции, имеющей разрыв на отрезке. Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0,1), но является на нем неограниченной, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$. Кроме того, эта функция не достигает на интервале (0,1) наибольшего значения.

Другой пример: функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 (ее график изображен на рис. 14) и, хотя значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, но ни в какой точке функция $f(x)$ не принимает нулевые значения.

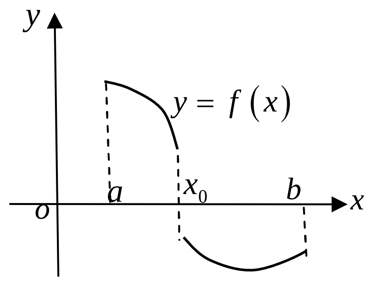

Рис.14

Глава 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление функции одной переменной изучает одно из основных математических понятий – понятие производной и дифференциала и их применение, в частности для исследования функций.

6. Производная и дифференциал функции

Понятие производной широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости протекания различных процессов.

6.1. Определение производной

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y=f(x)$ получит приращение $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, которое характеризует изменение функции $f(x)$ на отрезке $[x,\, x+\Delta x]$. Средняя скорость изменения функции на этом отрезке равна $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, а скорость изменения функции $f(x)$ в точке x есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Этот предел, если он существует, называется производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x. Итак, по определению

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}.$$

Для функции $y=f(x)$ приняты и другие обозначения производной: $y'(x)$, y'_x.

Пример 6.1. Доказать, что $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$, $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$.

Решение. Воспользуемся определением производной и первым замечательным пределом:

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}=1\cdot\cos x.$$

Итак, $\left(\sin x\right)'=\cos x.$ Аналогично доказывается, что $\left(\cos x\right)'=-\sin x.$

Пример 6.2. Доказать, что $\boxed{\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}}$, $\boxed{\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}}$.

Решение. Воспользуемся определением производной:

$$\left(\ln x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x\to 0$ и фиксированном x функция $\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ эквивалентна функции $\frac{\Delta x}{x}$ (см. пример 4.9), поэтому

$$\left(\ln x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

Так как $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$, то $\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\left(\ln x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$

6.2. Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим на кривой $y=f\left(x\right)$ точки M_0, M и секущую M_0M (рис.15). При движении точки M по этой кривой к точке M_0 секущая M_0M займет свое предельное положение M_0T .

Предельное положение M_0T секущей M_0M при стремлении точки M по кривой к точке M_0, называется ***касательной*** к данной кривой в точке M_0

Найдем угловой коэффициент $k_{сек}$ невертикальной секущей и угловой коэффициент $k_{кас}$ невертикальной касательной: $k_{сек}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}$,

$$k_{кас}=\lim_{M\to M_0}k_{сек}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right).$$

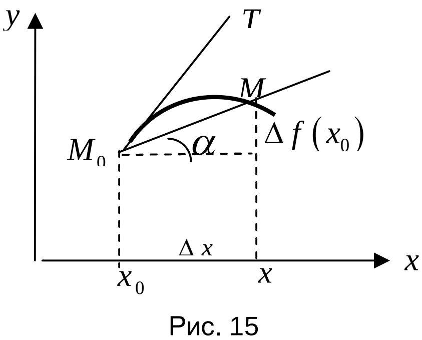

Рис. 15

Из этого равенства вытекает ***геометрический смысл*** производной.

Значение производной $f'\left(x_0\right)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y=f\left(x\right)$ в точке M_0 с абсциссой x_0: $f'\left(x_0\right)=k_{кас}$

Если угол наклона секущей стремится к $\frac{\pi}{2}$ (рис.16), то касательная – вертикальна.

При этом $k_{сек} \to \infty$ при $M \to M_0$, $k_{кас} = \lim\limits_{M \to M_0} k_{сек} = \infty$. Следовательно, $f'(x_0) = \infty$.

Кривая $y = f(x)$ может не иметь касательную (рис.17) в смысле приведенного выше определения, но имеет правостороннюю касательную l_1 с угловым коэффициентом $k_1 = f'(x_0 + 0)$ и левостороннюю касательную l_2 с угловым коэффициентом $k_2 = f'(x_0 - 0)$, при этом $k_1 \neq k_2$. Тогда $f'(x_0)$ не существует.

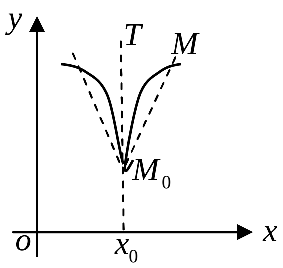

Рис.16

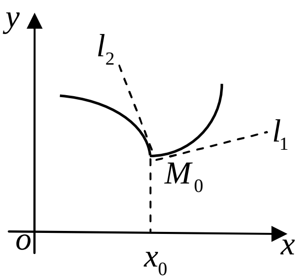

Рис.17

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной к кривой, называется ***нормалью*** к этой кривой.

Угловой коэффициент нормали $k_{норм.} = \dfrac{-1}{k_{кас.}}$.

Уравнение прямой, если известен ее угловой коэффициент и точка $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид: $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$.

Для записи уравнения касательной или нормали к кривой $y = f(x)$ следует положить $y_0 = f(x_0)$ и $k = k_{кас}$ или $k = k_{норм}$ соответственно.

Физический смысл производной заключается в том, что значение производной $f'(x)$ есть скорость изменения функции $f(x)$ в точке x. Поэтому

1) если задан закон движения материальной точки по прямой $S = S(t)$, то скорость движения $v = S'(t)$, а ускорение a есть «скорость изменения скорости», то есть $a = v'(t)$;

2) если $Q = Q(t)$ есть количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то $Q'(t) = I$ есть сила тока ;

3) если $N = N(t)$ есть количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то $N'(t)$ есть скорость химической реакции.

6.3. Дифференцируемые функции. Дифференциал

Определение. Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x, если она имеет производную в этой точке.

Операция отыскания производной называется дифференцированием функции.

Пусть функция дифференцируема, то есть имеет производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Тогда согласно теореме 3.1 о связи функции с ее пределом:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ есть функция бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Поэтому приращение дифференцируемой функции представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.} \tag{6.1}$$

Выражение $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***дифференциалом*** функции и обозначают $d f(x)$:

$$\boxed{d f(x) = f'(x) \cdot \Delta x.}$$

Отметим следующие моменты.

1). Дифференциал функции линеен относительно Δx и имеет при $\Delta x \to 0$ тот же порядок малости, что и Δx.

2). Второе слагаемое в равенстве (6.1) является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой $o(\Delta x)$ более высокого порядка, чем Δx.

3). Приращение дифференцируемой функции $f(x)$ представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x) = d f(x) + o(\Delta x).}$$

4). Так как $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$, то для функции, равной x, имеем $d(x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$, то есть $\Delta x = dx$. Поэтому

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}, \qquad \boxed{f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}}.$$

6.4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Если функция дифференцируема , то она непрерывна.

Действительно, для дифференцируемой функции $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. Отсюда следует, что бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x)$ и, значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке x.

Непрерывная функция может не быть дифференцируемой.

Примером такой функции является функция $f(x) = |x|$. Эта функция непрерывна при $x = 0$, так как $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$. Но функция не дифференцируема при $x = 0$, так как

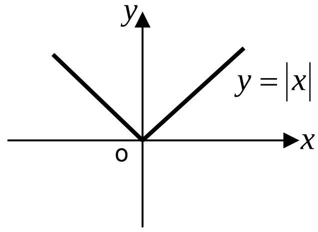

Рис.18

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

и, значит, $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ не существует; функция $f(x)$ не дифференцируема при $x=0$. Отметим, что существуют односторонние пределы $f'(+0)=1$, $f'(-0)=-1$. С геометрической точки зрения это означает, что в точке $(0,0)$ существуют, но не совпадают правосторонняя касательная с угловым коэффициентом $k=1$ и левосторонняя касательная с угловым коэффициентом $k=-1$ (рис.18).

6.5. Производная суммы, произведения, частного

Отыскание производных непосредственно по определению неудобно и сложно. Для этого существуют ряд правил и формул.

Теорема 6.1. Пусть функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ − дифференцируемы. Тогда сумма, разность, произведение этих функций, а при $v(x)\neq 0$ и частное дифференцируемы, причем

$$\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v', \quad (uv)'=u'v+uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}.$$

Выведем одну из этих формул, например, вторую.
Так как $\Delta u(x)=u(x+\Delta x)-u(x)$, то $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u(x)$.
Аналогично, $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v(x)$.
Найдем приращение функции $f(x)=u(x)\cdot v(x)$:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=$$
$$=\left[u(x)+\Delta u(x)\right]\cdot\left[v(x)+\Delta v(x)\right]-u(x)\cdot v(x)=u(x)\cdot\Delta v(x)+v(x)\cdot\Delta u(x)+\Delta u(x)\cdot\Delta v(x).$$

Тогда
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=u(x)\cdot\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}+v(x)\cdot\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}+\Delta u(x)\cdot\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}. \qquad (6.2)$$

Функция $u(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна. Поэтому $\Delta u(x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Переходя в равенстве (6.2) к пределу при $\Delta x\to 0$, получим: $\left(u(x)v(x)\right)'=f'(x)=u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)+0\cdot v'(x)$ или $(uv)'=u'v+uv'$.
Остальные формулы выводятся аналогично.

Следствие 1. $\boxed{(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}}$, $\boxed{(\operatorname{ctg}x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}}$.

Действительно, по формуле для производной частного имеем:

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично выводится формула для производной $\operatorname{ctg}x$.

Следствие 2. Дифференциалы суммы, произведения, частного дифференцируемых функций $u=u(x)$, $v=v(x)$ вычисляются по формулам:

$$\boxed{d(u+v)=du+dv, \quad d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}\ (v\neq 0)}.$$

Докажем, например, вторую формулу. Воспользуемся определением дифференциала и производной произведения:

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = v(u'dx) + u(v'dx) = v\,du + u\,dv.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \frac{3}{\cos x} + 5; \quad \text{б) } f(x) = x \operatorname{tg} x; \quad \text{в) } f(x) = 5 + \frac{x}{\ln x}.$$

Ответы: а) $f'(x) = 3\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; б) $f'(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$; в) $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

6.6. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u, независимым аргументом x.

Теорема 6.2. Пусть функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ дифференцируемы. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема и для ее производной справедлива формула: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Доказательство. Для дифференцируемой функции $y = f(u)$ имеем:

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \alpha(\Delta u), \tag{6.3}$$

где $\alpha(\Delta u)$ – бесконечно малая функция при $\Delta u \to 0$.

Разделив равенство (6.3) на Δx, получим: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \alpha(\Delta u)$.

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u). \tag{6.4}$$

Функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема, а значит, и непрерывна. Поэтому ее приращение $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\alpha(\Delta u) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и равенство (6.4) примет вид: $y'_x = y'_u \cdot u'_x + u'_x \cdot 0 = y'_u \cdot u'_x$.

Итак, для нахождения производной сложной функции надо производную функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Пример 6.3. Найти производную функции $y = \ln^3 \sin x$.

Решение. Данную сложную функцию можно представить в виде $y = u^3$, где $u = \ln v$, $v = \sin x$. Поэтому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \cos x = 3\ln^2 \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 3\operatorname{ctg} x \cdot \ln^2 \sin x.$$

В дальнейшем, при приобретении навыка, промежуточные аргументы $u, v, \ldots$ можно вводить «мысленно» и не писать их. Например,

$$\left(\operatorname{tg}^2 x^3\right)' = 2\ \operatorname{tg} x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 .$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций: а) $y = \ln \operatorname{tg} x^2$; б) $y = \sin^3\left(x^5\right)$;

Ответы: а) $y' = \dfrac{4x}{\sin 2x^2}$; б) $y' = 15x^4 \cdot \sin^2\left(x^5\right) \cdot \cos\left(x^5\right)$.

6.7. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной функции $y = f(x)$ удобно равенство $y = f(x)$ сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать. Такой прием называют логарифмическим дифференцированием. Его полезно применять для дифференцирования произведения многих сомножителей, или для дифференцирования частного, числитель и знаменатель которого содержит несколько множителей, или для дифференцирования степенно-показательных функций $u(x)^{v(x)}$. При этом следует учесть, что функция $\ln y -$сложная, так как $y = y(x)$ и поэтому $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y \cdot y'_x = \dfrac{1}{y} \cdot y'_x$.

Пример 6.4. Доказать, что $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a}$, $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$.

Решение. Прологарифмируем равенство $y = a^x$: $\ln y = x \ln a$; затем продифференцируем равенство по x: $\dfrac{1}{y} \cdot y'_x = \ln a$ и выразим y'_x: $y'_x = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$.

При $a = e$ получим: $\left(e^x\right)' = e^x$.

Пример 6.5. Доказать, что $\boxed{\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}}$.

Решение. Прологарифмируем равенство $y = x^a$: $\ln y = a \cdot \ln x$; затем продифференцируем по x: $\dfrac{1}{y} \cdot y'_x = a \cdot \dfrac{1}{x}$ и выразим y'_x: $y'_x = \dfrac{a}{x} \cdot y = \dfrac{a}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}$.

Пример 6.6. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot e^{\sin x}}{(x+1)^4}$.

Решение. Найти y' как производную частного слишком громоздко. Удобнее применить логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln \frac{(x-5)^{2/3} \cdot e^{\sin x}}{(x+1)^4} = \ln(x-5)^{2/3} + \ln e^{\sin x} - \ln(x+1)^4, \qquad \ln y = \frac{2}{3}\ln(x-5) + \sin x - 4\ln(x+1).$$

Продифференцируем последнее равенство по x: $\dfrac{1}{y} \cdot y' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x-5} + \cos x - 4 \cdot \dfrac{1}{x+1}$.

Выразим y': $y' = y\left(\frac{2}{3(x-5)} + \cos x - \frac{4}{x+1}\right) = \frac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot e^{\sin x}}{(x+1)^4} \cdot \left(\frac{2}{3(x-5)} + \cos x - \frac{4}{x+1}\right)$.

Пример 6.7. Найти производную функции $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Так как основание и показатель степени переменны, то следует применить логарифмическое дифференцирование. Прологарифмируем исходное равенство: $\ln y = \ln\left(x^{\operatorname{tg} x}\right)$ или $\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем по x, используя формулу для производной сложной функции (в левой части) и формулу для производной произведения (в правой части):

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}.$$

Тогда $y' = y \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций: а) $y = \frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot (x-2)^2}{(x-5)^3}$; б) $y = x^{x^2+1}$.

Ответы: а) $y' = \frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot (x-2)^2}{(x-5)^3}\left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+5}\right)$; б) $y' = x^{x^2+1}\left(2x \ln x + \frac{x^2+1}{x}\right)$.

6.8. Производная обратной функции

Теорема 6.3. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна и дифференцируема на интервале (a,b), причем $y'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема и ее производная вычисляется по формуле $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Доказательство теоремы рассматривать не будем.

Следствие. Производные обратных тригонометрических функций вычисляются по формулам:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Выведем первую из этих формул. Рассмотрим функцию $x = \sin y$, $y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Эта функция монотонна, дифференцируема и $x'_y = \cos y \neq 0$ на рассматриваемом интервале. Поэтому обратная функция $y = \arcsin x$ – дифференцируема, причем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Аналогично выводится формула для производной $\operatorname{arctg} x$. Кроме того,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому $(\arccos x)' = -(\arcsin x)'$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)'$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg} e^{-2x}$, б) $y = \arccos\sqrt{1-3x}$, в) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Ответы: а) $y'_x = \dfrac{-2e^{-2x}}{\left(1+e^{-4x}\right)}$; б) $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$; в). $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

6.9. Таблица производных

Приведем сводку полученных нами правил и формул дифференцирования .

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(uv)' = u'v + uv'$, в частности, $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где c – число,
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = \dfrac{-c \cdot v'}{v^2}$, где c – число,
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, где $y = y(u)$, $u = u(x)$,
5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ $(x'_y \neq 0)$.

Формулы дифференцирования

1. $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$, в частности, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, в частности, $\left(e^x\right)' = e^x$;
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;
6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$;
8. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
9. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

6.10. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ − дифференцируемая функция. Производная $y' = f'(x)$ также является функцией от x. Ее производная $\left(y'(x)\right)'$ называется производной второго порядка и обозначается $y''(x)$, или $f''(x)$, или $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Аналогично $\left(y''(x)\right)' = y'''(x)$, $\left(y'''(x)\right)' = y^{(4)}(x), \ldots$ Производной n−го порядка функции называется производная от производной $(n-1)$−го порядка:

$$\boxed{y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'}.$$

Пример 6.8. Найти формулу для производной n−го порядка функции $y = a^x$.

Решение. $y' = a^x \ln a$, $y'' = \left(a^x\right)' \ln a = a^x \ln^2 a, \ldots, y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

6.11. Функции, заданные параметрически, и их производные

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана при помощи уравнений:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{6.5}$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром. Будем предполагать, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$. Тогда равенства (6.5) определяют сложную функцию $y = y\left(t(x)\right)$, заданную параметрическими уравнениями (6.5).

Теорема 6.4. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ – дифференцируемые функции, причем $x'(t) \neq 0$ и функция $x(t)$ имеет обратную. Тогда функция $y = y(x)$ дифференцируема, а ее производная находится по формуле: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Если функции $x(t), y(t)$ – дважды дифференцируемы, то существует производная второго порядка y''_{xx}, причем $y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

Доказательство. Как уже отмечалось, равенства (6.5) определяют сложную функцию $y = y(t)$, где $t = t(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции и обратной функции

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аналогично $$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \left(y'_x\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Пример 6.9. Найти y'_x, y''_{xx} для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t$.

Решение. Используем полученные формулы:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3\sin^2 t\cdot\cos t}{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-\operatorname{tg} t,$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(-\operatorname{tg} t\right)'_t}{x'_t}=\frac{-1/\cos^2 t}{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4 t\,\sin t}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти y''_{xx} от функции $y=y(x)$, заданной параметрически

а) $\begin{cases}x=t\sin t\\ y=1-\cos t,\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3,\end{cases}$ в) $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$

Ответ: а) $y''_{xx}=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}$; б) $y''_{xx}=\dfrac{3}{4-4t}$; в) $y''_{xx}=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$.

6.12. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y=y(x)$ – дифференцируемая функция независимого аргумента x. Тогда дифференциал функции

$$d\,y(x)=y'(x)\,dx\,, \tag{6.6}$$

причем $dx=\Delta x$ не зависит от x. Дифференциал $d\,y(x)$ при фиксированном dx является функцией от x. Поэтому можно рассмотреть дифференциал от этой функции $d\left(d\,y(x)\right)$, который называется дифференциалом второго порядка функции $y(x)$ и обозначается $d^2y(x)$. Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков.

Определение дифференциалов высших порядков

Дифференциалы высших порядков определяются при фиксированном dx следующим образом:

$$\boxed{d^2y=d(dy),\quad d^3y=d\left(d^2y\right),\ldots,d^{(n)}y=d\left(d^{(n-1)}y\right)}.$$

Вычисление дифференциалов высших порядков

Выведем формулы для вычисления дифференциалов высших порядков:

$$d^2y=d(dy)=d\left(y'dx\right)=d\left(y'\right)dx=\left(y''dx\right)dx=y''(dx)^2,$$ то есть

$$\boxed{d^2y=y''(dx)^2}. \tag{6.7}$$

Аналогично вычисляется дифференциал любого n–го порядка:

$$\boxed{d^ny=y^{(n)}(x)(dx)^n}.$$

Дифференциалы сложной функции

Приведенные выше формулы справедливы только, если x – независимая переменная. Теперь рассмотрим случай, когда $y = f(x)$ и $x = x(t)$ – зависимая переменная . Тогда функция $y = f(x(t))$ – сложная функция аргумента t и для ее дифференциала получим: $dy = y_t' dt = (y_x' \cdot x_t') dt = y_x' (x_t' dt) = y_x' dx$.

> Форма дифференциала первого порядка $dy = y_x' dx$ имеет один и тот же вид (т.е. ***инвариантна)*** и в случае, когда x – зависимое переменное, и в случае, когда x – независимое переменное.

7. Теоремы о среднем

7.1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение. В их формулировке фигурирует некоторая «средняя» точка, поэтому их называют теоремами о среднем. Иногда, в силу их значимости, эти теоремы называют основными теоремами дифференциального исчисления.

> ***Теорема Ролля.*** Пусть функция $f(x)$
> 1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируема на интервале (a,b),
> 3) на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$.
> Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ принимает наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Возможны два случая. а). Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a,b]$ и, значит, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a,b]$.

б). Если $M \neq m$, а по условию $f(a) = f(b)$, то функция $f(x)$ хотя бы одно из значений M или m принимает внутри отрезка $[a,b]$ в точке $c \in (a,b)$. Пусть , например, $f(c) = m$. Тогда $f(c) \le f(c + \Delta x)$ для любых достаточно малых Δx. Поэтому $\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \ge 0$ и, значит,

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \ge 0 \quad \text{при } \Delta x > 0, \qquad \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{при } \Delta x < 0.$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, то существует производная $f'(c)$, причем $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \ge 0$. С другой стороны,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0.$$

Отсюда следует, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если выполнены условия теоремы, то на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси OX. На рис.19 таких точек две : это точки C_1 и C_2.

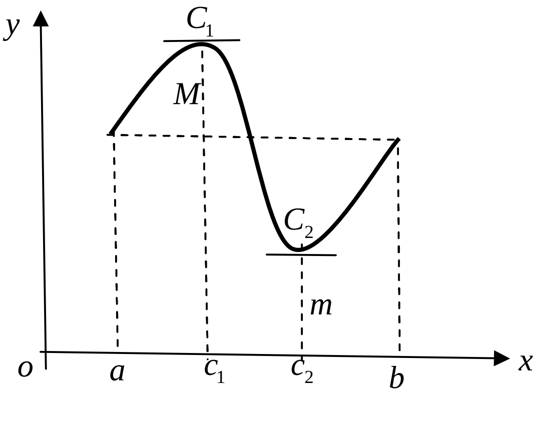

Рис.19

Следствие. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и $f(a) = f(b) = 0$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, в которой $f'(c) = 0$. Другими словами, между двумя нулями функции найдется хотя бы один нуль производной.

> ***Теорема Лагранжа.*** Пусть функция $f(x)$
> 1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируема на интервале (a,b).
> Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, такая, что
> $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{или} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (7.1)$$

Формулу (7.1) называют ***формулой конечных приращений Лагранжа.***

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\Phi(x) = f(x) - \lambda x$. Подберем λ так, чтобы $\Phi(a) = \Phi(b)$. Тогда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Вспомогательная функция $\Phi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $\Phi(a) = \Phi(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $\Phi'(c) = 0$. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \lambda = 0$, $\quad f'(c) = \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB (рис.20), а $f'(c)$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой c. Поэтому из теоремы следует, что на кривой $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка C, в которой касательная к кривой параллельна секущей AB. На рис. 20 таких точек две: это точки C_1, C_2.

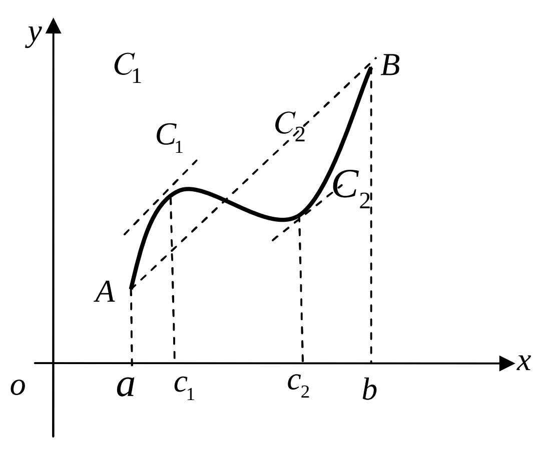

Рис.20

Следствие. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Доказательство. Пусть $f'(x)=0$ на интервале (a,b). Рассмотрим две произвольные точки $x_1<x_2$ из интервала (a,b). Тогда по теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, где $c-$некоторая точка из промежутка (x_1,x_2). Так как $f'(c)=0$, то $f(x_2)-f(x_1)=0$. Поэтому $f(x_2)=f(x_1)$ для произвольных точек x_1,x_2 из (a,b), а значит, $f(x)$ постоянна на (a,b).

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$
1) непрерывны на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируемы на интервале (a,b),
3) $g'(x)\neq 0$ на (a,b). Тогда найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$, такая, что
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

7.2. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, выводится с помощью теоремы Коши и использует производные.

Теорема Лопиталя. Пусть в выколотой окрестности точки a функции $f(x)$, $g(x)-$дифференцируемы и $g'(x)\neq 0$. Тогда, в случае неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ предел отношения функций при $x\to a$ равен пределу отношения их производных, если последний предел существует:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство проведем для частного случая, когда точка $a-$ конечна и $f(a)=g(a)=0$ (неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$). Функции $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывны на отрезке $[a,x]$, лежащем в окрестности точки a, дифференцируемы на интервале (a,x) и $g'(x)\neq 0$ на (a,x). Поэтому можно применить теорему Коши: $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, где $c\in(a,x)$. Учитывая, что $f(a)=g(a)=0$, получим:
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
Перейдем в этом равенстве к пределу при $x\to a$, а значит, и при $c\to a$:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что предел функции не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент.

Замечание. Если $f'(x)$ и $g'(x)$ − бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$, то снова получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и можно повторно применить правило Лопиталя, если будут выполняться условия теоремы для функций $f'(x), g'(x)$.

Пример 7.1. При $a > 0$ имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^a\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{a\cdot x^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a\cdot x^a} = 0.$$

Итак, при $x \to +\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем x^a $(a > 0)$.

Пример 7.2. При $a > 1$ имеем: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^n\right)'}{\left(a^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{a^x\ln a}.$$

Если $n > 1$, то снова получаем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и снова применяем правило Лопиталя и т.д.: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{a^x\,(\ln a)^2} = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots 1}{a^x\,(\ln a)^n} = 0.$$

Итак, при $x \to +\infty$ функция x^n растет медленнее, чем a^x $(a > 1)$.

Использование правила Лопиталя для раскрытия других видов неопределенностей

Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$ сводят к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ путем тождественных преобразований и затем применяют правило Лопиталя.

Пример 7.3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

Решение. а). Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Сведем ее к неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{-\ln x}{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{-(\ln x)'}{\left(\operatorname{ctg}\sqrt{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{-1/x}{\dfrac{-1}{\sin^2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{x} = 2\lim_{x\to+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to+0}\sin\sqrt{x} = 2\cdot1\cdot0 = 0.$$

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$.

б). Имеем неопределенность вида $\left[\infty^0\right]$. Используем основное логарифмическое тождество: $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to+0}e^{\ln\left[(1/x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln(1/x)}=e^0=1.$
Здесь мы воспользовались пределом, вычисленным в пункте а).

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить пределы: 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

Ответы: 1) 2; 2) 0,5; 3) $e^{-1/8}$.

7.3. Формула Тейлора

Во многих прикладных задачах требуется заменить сложную функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$, близким к $f(x)$ в окрестности точки x_0, в том смысле, что

$$\boxed{P_n(x_0)=f(x_0),\ \ P_n'(x_0)=f'(x_0)\ ,...,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)}. \tag{7.2}$$

Введем ряд понятий.

1). Многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (7.2), называется ***многочленом Тейлора*** n–го порядка функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

2). Разность между функцией $f(x)$ и её многочленом Тейлора $P_n(x)$ обозначают $R_n(x)$: $\quad R_n(x)=f(x)-P_n(x)\ \Rightarrow\ f(x)=P_n(x)+R_n(x)$.

3). Формула $\boxed{f(x)=P_n(x)+R_n(x)}$ называется ***формулой Тейлора*** n – го порядка для функции $f(x)$. Здесь $P_n(x)$ есть ***многочлен Тейлора*** n – го порядка функции $f(x)$; $R_n(x)$- ***остаточный член*** формулы Тейлора.

Теорема 7.1 (о виде многочлена Тейлора).
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Тогда многочлен Тейлора n – го порядка функции $f(x)$ имеет вид:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7.3}$$

Доказательство. Будем искать многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n.$$

Найдем производные этого многочлена

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

....

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 1\cdot a_n=n!\ a_n.$$

Вычислим эти производные в точке x_0 и воспользуемся равенствами (7.2):

$$P_n(x_0)=a_0;\quad P_n(x_0)=f(x_0)\ \Rightarrow\ a_0=f(x_0);$$
$$P_n'(x_0)=a_1;\quad P_n'(x_0)=f'(x_0)\Rightarrow\ a_1=f'(x_0);$$
$$P_n''(x_0)=2a_2;\quad P_n''(x_0)=f''(x_0)\ \Rightarrow\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!};$$
$$P_n'''(x_0)=3\cdot 2\cdot a_3;\quad P_n'''(x_0)=f'''(x_0)\ \Rightarrow\ a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},$$
....
$$P_n^{(n)}(x_0)=n!\,a_n;\qquad P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)\ \Rightarrow\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$
Подставив коэффициенты $a_0,a_1,...,a_n$ в многочлен $P_n(x)$, получим формулу (7.3).

Теперь формулу Тейлора n – го порядка можно записать в виде

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)}. \tag{7.4}$$

При $x_0=0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена и имеет вид:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)}\ . \tag{7.5}$$

Рассмотрим вид остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора.

Теорема 7.2 (об остаточном члене в форме Пеано).
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Тогда остаточный член формулы Тейлора имеет вид:
$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right) \text{ при } x\to x_0 \tag{7.6}$$
и называется остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Из определения многочлена Тейлора (7.2) следует, что
$$f(x_0)-P_n(x_0)=0,\quad f'(x_0)-P_n'(x_0)=0,\ ...,\ f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)=0.$$
Тогда для остаточного члена $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ получим:
$$R_n(x_0)=0,\quad R_n'(x_0)=0,\quad R_n''(x_0)=0,\ \ldots,\ R_n^{(n)}(x_0)=0\ . \tag{7.7}$$
Учитывая это, вычислим $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$, используя n раз правило Лопиталя:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n\,(x-x_0)^{n-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n''(x)}{n\,(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2}}=...=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$
Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$, то это означает, что $R_n(x)$ при $x\to x_0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$, то есть $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

Рассмотрим еще один вид остаточного члена формулы Тейлора, дающий более точную оценку.

Теорема 7.3 (об остаточном члене в форме Лагранжа).
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в окрестности точки x_0. Тогда остаточный член формулы Тейлора в этой окрестности можно записать в форме

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}\ , \tag{7.8}$$

где c – некоторая точка между x и x_0.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Пример 7.4. Вычислить число e с точностью до 0,01.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$ и $x_0=0$. С учетом того, что $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1$, формула Тейлора (7.5) примет вид: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$.
Запишем остаточный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа по формуле (7.8), учитывая, что $x_0=0$, $f^{(n+1)}(x)=e^x$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

При $x=1$ формула Тейлора примет вид:

$$e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+R_n(1),$$

где $R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}$, причем точка c находится между $x=1$ и $x_0=0$, то есть $0<c<1$. Тогда $e^c<e^1<3$. Подберем n так, чтобы $R_n(1)<0,01$. Так как $R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<0.01$, то $(n+1)!>300$. Это неравенство выполняется при $n=5$ $(4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,\ \ 5!=24\cdot 5=120,\ \ 6!=120\cdot 6=720.)$. Итак, с погрешностью 0,01

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\approx 2,72.$$

Запишем формулу Тейлора для некоторых элементарных функций при $x_0=0$.

1). Пусть $f(x)=e^x$ и $x_0=0$. Вычислим производные функции e^x в точке x и в точке x_0: $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$. Используя формулы (7.5) и (7.6), получим:

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).}\ . \tag{7.9}$$

В частности, при $n=1$ и $n=2$ имеем:

$$e^x=1+x+o(x),\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

2). Пусть $f(x)=\sin x$ и $x_0=0$. Тогда

$f'(x)=\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x,\ \ f'''(x)=-\cos x,\ldots\ f'(0)=1,\ \ f''(0)=0,\ \ f'''(0)=-1,\ldots$.

Используя формулы (7.5) и (7.6) при $n=2k$, получим:

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o\left(x^{2k}\right)}. \qquad (7.10)$$

В частности, при $k=1$ и $k=2$ имеем: $\sin x = x+o(x^2),\ \ \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$.

3). Аналогично получается формула Тейлора и для функций $\cos x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha$.

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2k+1}\right)}. \qquad (7.11)$$

В частности, при $k=1$ имеем: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)}. \qquad (7.12)$$

В частности, при $n=1$ имеем: $\ln(1+x)=x+o(x)$. (7.13)

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n).}$$

В частности, при $n=1$ имеем:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x). \qquad (7.14)$$

Формулу Тейлора иногда удобно использовать для отыскания пределов.

Пример 7.5. Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия воспользуемся формулой (7.11) при $k=2$ и формулой (7.9) при $n=2$, причем в формуле (7.9) заменим x на $\frac{-x^2}{2}$: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$,

$$e^{-x^2/2}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right).$$

Учитывая эти разложения, вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{12}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Разложить многочлен $P_4(x) = x^4 - 7x^3 + x^2 - 2x + 5$ по степеням $(x+1)$

Ответ: $P_4(x) = 16 - 29(x+1) + 28(x+1)^2 - 11(x+1)^3 + (x+1)^4$.

2. Написать формулу Тейлора 2–го порядка для функции

а) $f(x) = e^{2x}$ в окрестности точки $x_0 = 4$.

б) $f(x) = \ln\left(4 + x^2\right)$ в окрестности $x_0 = 0$.

Указание. Воспользоваться формулой Тейлора для функций e^x, $\ln(1+x)$ и $x_0 = 0$.

Ответы: а) $e^{2x} = e^8\left(1 + 2(x-4) + \dfrac{2^2}{2!}(x-4)^2\right) + o\left((x-4)^2\right)\Bigg)$, б)

$\ln\left(4 + x^2\right) = \ln 4 + \dfrac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$.

8. Исследование функций с помощью производной

Одним из приложений производной является применение производной к исследованию функции и построению графика функции. Мы рассмотрим такие характеристики функции, как монотонность, экстремум, выпуклость, а также асимптоты графика функции.

8.1. Монотонность функции

К монотонным функциям относятся функции возрастающие или убывающие на промежутке. Напомним, что функция возрастает (соответственно убывает) на интервале (a,b), если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f\left(x_1\right) \le f\left(x_2\right)$ (соответственно $f\left(x_1\right) \ge f\left(x_2\right)$).

Теорема 8.1 (критерий монотонности).
Дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \ge 0$ (соответственно $f'(x) \le 0$) на интервале (a,b).

Доказательство. 1). Пусть функция $f(x)$ возрастает на (a,b).

Если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) \ge f(x)$, $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$ и $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) \le f(x)$, $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \le 0$ и $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$.

Таким образом, $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$ и для $\Delta x > 0$, и для $\Delta x < 0$. Тогда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$, где x – произвольная точка из интервала (a,b).

2). В обратную сторону, пусть $f'(x) \geq 0$ на интервале (a,b). Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на произвольном отрезке $[x_1, x_2]$ из (a,b):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Так как $f'(c) \geq 0, \quad x_2 - x_1 \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Таким образом, $f(x_1) \leq f(x_2)$ для произвольных точек x_1, x_2 из (a,b) таких, что $x_1 < x_2$; значит функция $f(x)$ возрастает на (a,b).

8.2. Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), содержащем точку x_0.

1). Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $f(x)$, если $f(x_0) > f(x)$ для всех x из некоторой выколотой окрестности точки x_0.

2). Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $f(x)$, если $f(x_0) < f(x)$ для всех x из некоторой выколотой окрестности точки x_0.

3). Точки максимума и минимума функции называют ***точками экстремума*** функции.

Так как $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, то в окрестности точки x_0

$\Delta f(x_0) < 0$, если x_0 – точка максимума;

$\Delta f(x_0) > 0$, если x_0 – точка минимума.

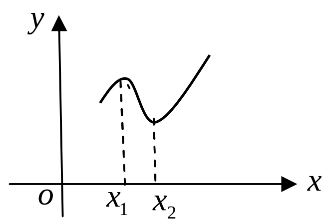

Рис.21

На рис. 21 точка максимума – x_1, точка минимума – x_2.

Для отыскания точек экстремума выведем необходимое условие экстремума и достаточные условия.

> ***Теорема 8.2 (необходимое условие экстремума).***
> Пусть функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0. Тогда производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует.

Доказательство от противного. Пусть производная $f'(x)$ в точке x_0 существует и не равна нулю, например, $f'(x_0) > 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$ и из свойства пределов следует, что $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому $\Delta f(x_0) > 0$, если $\Delta x > 0$ и $\Delta f(x_0) < 0$, если $\Delta x < 0$. Так как $\Delta f(x_0)$ меняет знак в окрестности точки x_0, то экстремума в точке x_0 функция не имеет, что противоречит условию теоремы.

Сделаем ряд замечаний.

1). Точки экстремума, в которых $f'(x) = 0$, назовем ***точками гладкого экстремума***. В таких точках касательная к графику функции параллельна оси ox (рис.21).

2). Точки экстремума, в которых $f'(x)$ не существует, назовем ***точками острого экстремума.*** В таких точках касательная к графику функции перпендикулярна оси ox (рис.16) или не существует (рис.18) .

3). Необходимый признак экстремума не является достаточным, то есть из того, что $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, не следует, что $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0. Например, для функции $y = x^3$ ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не является точкой экстремума функции (рис. 22).

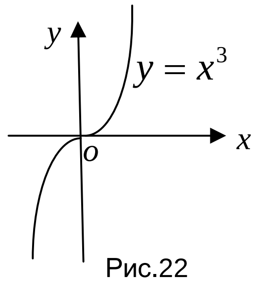

Рис.22

4). Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называют ***критическими точками*** функции.

Для исследования критической точки на экстремум используют первое или второе достаточное условие экстремума.

Теорема 8.3 (первое достаточное условие экстремума).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в выколотой окрестности точки x_0. Если производная $f'(x)$ при переходе (слева направо) через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Доказательство. Пусть $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то есть $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Тогда в силу теоремы 8.1 функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и убывает на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Это и означает, что x_0 – точка максимума функции.

Пример 8.1. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y = 3\cdot\sqrt[3]{x^2} - 2x$; построить ее график.

Решение. Найдем производную $y' = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}} - 2 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2$. Производная не существует при $x = 0$ и равна нулю при $x = 1$. Эти точки и есть критические точки функции. Они разбивают область определения функции − интервал $(-\infty, +\infty)$ на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. Исследуем знаки производной на этих интервалах, результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	–	∞	+	0	–
y	↘	0 min	↗	1 max	↘

Так как $y' = \infty$ при $x = 0$, то в этой точке касательная перпендикулярна оси ox и экстремум – острый. Так как $y' = 0$ при $x = 1$, то в этой точке касательная параллельна оси ox и экстремум – гладкий. При построении графика функции (рис.23) учтем еще, что $y = x\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 2\right)$ и, значит $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$; $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

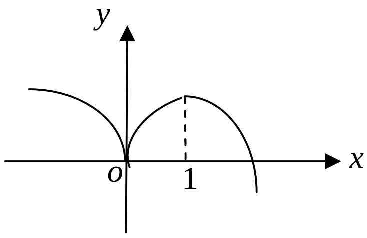

Рис.23

> ***Теорема 8.4 (второе достаточное условие экстремума).***
> Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x)$ в точке x_0.
> Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума для функции $f(x)$.
> Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума для функции $f(x)$.

Доказательство. По формуле Тейлора второго порядка

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Учитывая условия теоремы, получим:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Так как $(x - x_0)^2 > 0$, то знак $\Delta f(x_0)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, а именно:

если $f''(x_0) < 0$, то $\Delta f(x_0) < 0$, значит, x_0 – точка максимума,

если $f''(x_0) > 0$, то $\Delta f(x_0) > 0$, значит, x_0 – точка минимума.

Пример 8.2. Исследовать на экстремум функцию $y = \sin x + \cos x$ для $x \in [0;\ 2\pi]$.

Решение. Найдем производную: $y' = \cos x - \sin x$. Она всюду существует, а равна нулю, если $\cos x = \sin x$. Поэтому на отрезке $[0; 2\pi]$ получим две критические точки $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Исследовать эти точки на экстремум проще не по знаку первой производной в окрестности точек, а по знаку второй производной $y'' = -\sin x - \cos x$ в самих точках. Так как $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$, то точка $x_1 = \frac{\pi}{4}$ есть точка максимума, а точка $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ есть точка минимума данной функции.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$, функция убывает на $(-1;1)$.

2. Найти экстремумы функций а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, б) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

Ответ: а) при $x = 1$ – максимум, при $x = 3$ – минимум ;

б) при $x = \pi n$ – максимум, при $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$ – минимум .

3. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2;3]$.

Ответ: $M = f(3) = 21$, $m = f(1) = f(-2) = 1$.

8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

На практике часто встречаются задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке. Напомним, что функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения она принимает либо в критических точках внутри отрезка, либо на концах отрезка. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ следует:

1) найти критические точки функции на интервале (a,b),

2) вычислить значения функции в этих критических точках (не исследуя их) и на концах отрезка,
3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 8.3. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$ на отрезке $[-1,2]$.

Решение. Найдем критические точки функции: $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$;
$f'(x)=0$ в точке $x=1$, принадлежащей отрезку $[-1,2]$.

Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка: $f(1)=-1,\quad f(-1)=-9,\quad f(2)=0$. Поэтому на данном отрезке наибольшее значение функции $M=0$, наименьшее значение $m=-9$.

8.4. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

Пусть кривая $y=f(x),\ x\in(a,b)$ имеет в любой точке касательную.

Кривая называется ***выпуклой*** (соответственно ***вогнутой)***, если она расположена ниже (соответственно выше) любой своей касательной (или на ней).
Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется ***точкой перегиба.***

На рис. 24 дуга AC кривой $y=f(x),\quad x\in(a,c)$ – выпуклая, дуга CB кривой $y=f(x),\quad x\in(c,b)$ – вогнутая, точка C – точка перегиба.

Теорема 8.5 (условие выпуклости).
Если $f''(x)\le 0$ на (a,b), то кривая $y=f(x),\quad x\in(a,b)$ выпукла.
Если $f''(x)\ge 0$ на (a,b), то кривая $y=f(x),\quad x\in(a,b)$ вогнута.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0\in(a,b)$. Вычислим ординату точки кривой $y_{кр.}$, используя формулу Тейлора первого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$y_{кр.}=f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,$$

где точка c находится между x и x_0.

Используя уравнение касательной, вычислим ординату точки касательной $y_{кас.}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

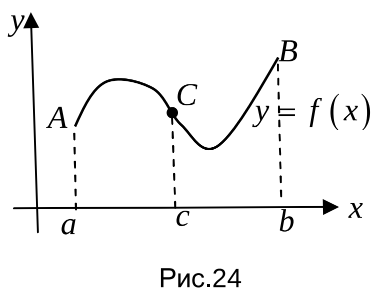

Рис.24

Тогда $\quad y_{кр.} - y_{кас.} = \dfrac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$.

Так как по условию $f''(x) \le 0$ на (a,b), то $y_{кр.} - y_{кас.} \le 0, \quad y_{кр.} \le y_{кас.}$. Следовательно, кривая $y = f(x)$ является выпуклой. Аналогично доказывается, что при $f''(x) \ge 0$ кривая является вогнутой.

Теорема 8.6 (необходимое условие точки перегиба).
Пусть точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба кривой $y = f(x)$. Тогда вторая производная $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует.

Доказательство. Пусть точка перегиба $(x_0, f(x_0))$ отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой. Тогда

при $x < x_0$ имеем: $f''(x) \le 0$ и, значит, $f'(x)$ убывает;

при $x > x_0$ имеем: $f''(x) \ge 0$ и, значит, $f'(x)$ возрастает.

Это означает, что функция $f'(x)$ имеет минимум в точке x_0, следовательно, ее производная $(f'(x))' = f''(x)$ в этой точке или равна нулю, или не существует.

Замечание. Необходимое условие точки перегиба не является достаточным. Например, кривая $y = x^4$ является выпуклой , так как $y'' = 12x^2 \ge 0$ и значит, не имеет точек перегиба, хотя $y'' = 0$ при $x = 0$.

Теорема 8.7 (достаточное условие точки перегиба).
Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка $(x_0\,,\ f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда кривая $y = f(x)$ выпукла при $x < x_0$ и вогнута при $x > x_0$. Следовательно, точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба этой кривой.

Итак, для исследования кривой $y = f(x)$ на выпуклость и точки перегиба нужно:

1) найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует;
2) рассмотреть интервалы, на которые эти точки разделят область определения функции;
3) исследовать знак $f''(x)$ на этих интервалах.

Пример 8.4. Найти точки экстремума функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Исследовать график этой функции на выпуклость, найти точки перегиба. Построить график функции.

Решение. 1). Вычислим первую производную: $f'(x)\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. Она равна нулю при $x = 0$ и не существует (обращается в бесконечность) при $x = \pm 1$. Знаменатель у производной $f'(x)$ положителен, а числитель меняет знак только при $x=0$, причем с – на +. Значит, $x=0$ точка минимума; $f(0)=-1$.

2). Для исследования на выпуклость найдем вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}-x\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\cdot 2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{-2\left(x^2+3\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^5}}.$$

Производная $f''(x)$ всюду отлична от нуля , но не существует при $x=-1,\ x=1$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1;+\infty)$. Исследуем знаки второй производной на этих интервалах, результаты оформим в виде таблицы.

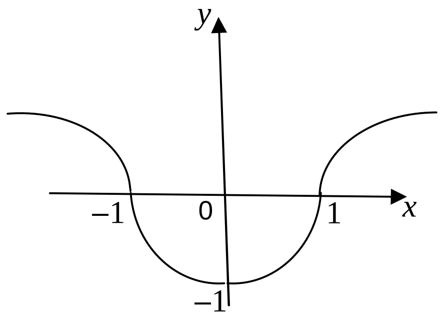

Рис.25

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$y=f(x)$	выпукла	вогнута	выпукла

Точки с абсциссами $x=\pm 1$ являются точками перегиба. Их ординаты $y=0$.

3). Для построения графика функции (рис.25) сначала нанесем точку минимума $(0;-1)$, затем точки перегиба $(-1;0),(+1;0)$ и учтем данные таблицы.

8.5. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Пример 8.5. Кривая $y=\frac{1}{x}$ (рис.26) имеет вертикальную асимптоту $x=0$ и горизонтальную асимптоту $y=0$.

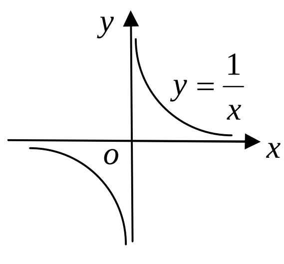

Рис.26

Отыскание вертикальных асимптот

Для отыскания вертикальных асимптот следует

1) вычислить $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где x_0- точка разрыва функции или граничная точка области определения;
2) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ есть вертикальная асимптота (рис.26);
если только правосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ является правосторонней вертикальной асимптотой.

Пример 8.6. Имеют ли вертикальные асимптоты следующие кривые а) $y=\dfrac{e^x}{x-3}$, б) $y=e^{\frac{-1}{x}}$, в) $y=\ln x$, г) $y=\dfrac{\sin x}{x}$?

Решение. а). Функция $y=\dfrac{e^x}{x-3}$ имеет точку разрыва $x=3$. Так как $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x}{x-3}=\infty$, то прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой.

б). Функция $y=e^{-1/x}$ имеет точку разрыва $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to -0} e^{-1/x}=\infty,\ \lim\limits_{x\to +0} e^{-1/x}=0$, то прямая $x=0$ является только левосторонней асимптотой.

в). Функция $y=\ln x$ определена на интервале $(0,+\infty)$ и не имеет точек разрыва. Исследуем граничную точку $x=0$ области определения. Так как $\lim\limits_{x\to +0}\ln x=-\infty$, то прямая $x=0$ является правосторонней асимптотой.

г). Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ имеет точку разрыва $x=0$, но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Прямая $x=0$ не является асимптотой.

Отыскание невертикальных асимптот

Теорема 8.8. Кривая $y=f(x)$ имеет невертикальную асимптоту $y=kx+b$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Доказательство. Пусть кривая $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=kx+b$. Тогда при $x\to\infty$ функция $f(x)$ отличается от $kx+b$ на бесконечно малую $\gamma(x)$, то есть $f(x)=kx+b+\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – бесконечно малая при $x\to\infty$. Из этого равенства имеем

$$\frac{f(x)}{x}=k+\frac{b}{x}+\frac{\gamma(x)}{x}\quad \text{и}\quad f(x)-kx=b+\gamma(x).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{b}{x}+\dfrac{\gamma(x)}{x}\right)=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b+\lim\limits_{x\to\infty}\gamma(x)=b$.

В обратную сторону, пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$. По свойству предела функция $f(x)-kx$ отличается от своего предела b на бесконечно малую $\gamma(x)$ при $x\to\infty$. Поэтому $\left[f(x)-kx\right]-b=\gamma(x)$ или $f(x)-(kx+b)\to 0$ при $x\to\infty$. Это и означает, что кривая $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=kx+b$.

Пример 8.7. Найти асимптоты кривой $y=x^2\cdot e^{-x}$.

Решение. Эта функция определена на всей числовой прямой, не имеет точек разрыва, а значит, не имеет и вертикальных асимптот. Для отыскания невертикальной асимптоты $y=kx+b$ вычислим $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $x\to+\infty$ и когда $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

$$k=\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x}=[\infty\cdot\infty]=\infty.$$

Следовательно, при $x\to-\infty$ асимптоты нет. Продолжим отыскание асимптоты при $x\to+\infty$ и найдем b, учитывая что $k=0$:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Итак, $k=0,\quad b=0$ при $x\to+\infty$. Поэтому прямая $y=kx+b$ или, в данном случае, $y=0$ является асимптотой при $x\to+\infty$.

Примеры для самостоятельного решения

Написать уравнения асимптот для следующих кривых:

а) $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$, б) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$, в) $y=(x+4)\cdot e^{-x}$.

Ответы: а) $x=-1$; $y=x-3$; б) $x=\pm1$; $y=1$; в) $y=0$ (асимптота при $x\to+\infty$).

8.6. Схема исследования функции и построение ее графика

При построении графика функции в общем случае можно использовать следующую схему:

1). Найти область определения функции.
2). Проверить функцию на четность, нечетность, периодичность.
3). Найти асимптоты графика функции.
4). Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
5). Исследовать график функции на выпуклость и точки перегиба.
6). Найти (если возможно) точки пересечения с осями координат.

Не всегда нужно точно следовать этой схеме. Отметим следующие случаи:
а) иногда для построения графика функции достаточно пунктов 1-4 (краткая схема);
б) если функция определена при $x\geq 0$, то не надо проверять ее четность;
в) если функция определена на конечном интервале, то не надо искать ее невертикальные асимптоты;
г) если функция четная (или нечетная), то достаточно исследование провести для $x\geq 0$, а при построении графика функции учесть, что он симметричен относительно оси oy для четной функции (относительно начала координат для нечетной функции);
д) если функция периодическая, то достаточно исследование провести на промежутке с длиной, равной периоду.

Пример 8.8. Исследовать по краткой схеме функцию $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$ и построить ее график.

Решение. 1). Функция не определена при $x=1$. Область ее определения состоит из двух интервалов $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$.

2). Функция – общего вида (не является четной, нечетной), так как

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{1-(-x)}=\frac{x^2}{1+x}\,,\quad f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x).$$

3). Найдем асимптоты графика функции.

Исследуем точку разрыва $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x}=\infty$.

Поэтому прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем невертикальную асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{1-x}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\left(x-x^2\right)}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=-1.$$

Поэтому прямая $y=-x-1$ является невертикальной асимптотой.

4). Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(1-x)-(-1)\cdot x^2}{(1-x)^2}=\frac{x\cdot(2-x)}{(1-x)^2};$$

$f'(x)$ не существует в точке $x=1$, но эта точка не входит в область определения функции; $f'(x)=0$ при $x=0,\ x=2$; эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;\,0)$, $(0;\,1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Исследуем знаки производной на этих интервалах; результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	+	0	−
$f(x)$	↘	min 0	↗	↗	max −4	↘

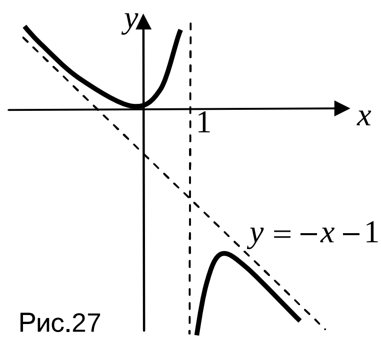

Рис.27

Построим асимптоты $x=1,\ y=-x-1$, точку минимума $(0;0)$, точку максимума $(2;-4)$ и график функции (рис.27).

Пример 8.9. Исследовать по краткой схеме функцию $f(x)=x^2e^{-x}$, построить ее график.

Решение. 1). Область определения −интервал $(-\infty,+\infty)$.

2). Функция – общего вида (не является четной , нечетной), так как

$$f(-x)=(-x)^2\cdot e^{x}=x^2\cdot e^{x};\quad f(-x)\neq f(x);\quad f(-x)\neq -f(x).$$

3). Асимптота найдена в примере 8.8. Это ─ прямая $y=0$ при $x\to+\infty$.

4). Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x}=e^{-x}\cdot\left(2x-x^2\right);$$

$f'(x)=0$ при $x=0,\ x=2$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;\,0)$, $(0;\,2)$, $(2;+\infty)$. Исследуем знаки производной на этих интервалах; учитывая, что $e^{-x}>0$; результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	max $4\,e^{-2}$	$\searrow$

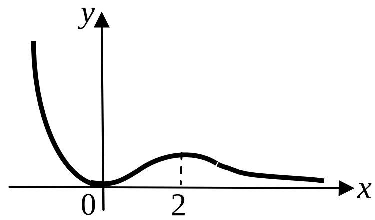

Рис.28

Построим асимптоту $y=0$ при $x \to +\infty$, точку минимума $(0;0)$, точку максимума $\left(2; 4e^{-2}\right)$ и график функции (рис.28).

Примеры для самостоятельного решения

Провести исследование и построить графики следующих функций:

а) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$, б) $y=\sqrt[3]{x^2}-x$, в) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$.

Ответы: а) определена всюду при $x \neq -1$; асимптоты $y=1$; $x=-1$; точка минимума $x=\dfrac{7}{5}$; точка перегиба $x=\dfrac{13}{5}$;

б) определена всюду; асимптот нет; точка минимума $x=0$, максимума $x=\dfrac{8}{27}$.

в) определена всюду, кроме $x=0$; асимптоты $x=0$, $y=x$; точка минимума $x=2$; всюду вогнута.

9. Вектор-функция

Понятие вектор-функции

Определение. Если каждому числу t из множества T по определенному закону поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t)$, то говорят, что на множестве T задана вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ скалярного аргумента t.

Пусть векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}(t)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют координаты:

$$\vec{r}=\{\,x,y,z\,\}, \quad \vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}.$$

Тогда векторное равенство $\vec{r}=\vec{r}(t)$ равносильно трем скалярным равенствам:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Вектор-функция изображается с помощью *годографа* (рис.29).

Годограф вектор-функции $\vec{r}(t)$ – это линия, проходящая через концы векторов $\vec{r}(t)$, отложенных из фиксированной точки O (*годос* – путь, *граф* – вычерчивать).

Например, годограф вектор-функции $\vec{r}(t)=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}$ есть окружность радиуса, равного единице. Действительно, равенство $\vec{r}=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}$ в координатной форме имеет вид: $x=\cos t,\ y=\sin t$ или $x^2+y^2=1$.

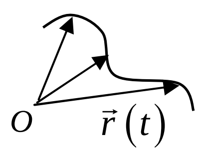

Рис.29

Предел и непрерывность вектор-функции

Предел вектор-функции определяется аналогично пределу скалярной функции.

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t)=\vec{b}, \text{ если для } \forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \text{ такое, что}$$
$$\left|\vec{r}(t)-\vec{b}\right|<\varepsilon \quad \text{для} \quad \forall t\in \overset{\circ}{S}_{\delta}(a).$$

Замечание. Нетрудно показать, что, если $\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, то

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t)=\vec{b} \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to a}x(t)=b_1,\; \lim_{t\to a}y(t)=b_2,\; \lim_{t\to a}z(t)=b_3.$$

Вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ называется ***непрерывной*** в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Производная вектор-функции

Производные вектор-функции определяется аналогично производным скалярной функции.

$$\vec{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}, \qquad \vec{r}''(t)=\left(r'(t)\right)', \qquad \vec{r}'''(t)=\left(\vec{r}''(t)\right)'$$

Приняты и другие обозначения производных: $\dot{\vec{r}}(t)$, $\ddot{\vec{r}}(t)$, $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Физический смысл производной

Приращение вектор-функции $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ есть изменение $\vec{r}(t)$ на отрезке $[t,t+\Delta t]$. Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ есть средняя скорость изменения $\vec{r}(t)$ на отрезке $[t,t+\Delta t]$.

Производная вектор-функции $\vec{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ есть мгновенная скорость изменения вектор-функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точке t.

Если в вектор-функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$ трактовать t как время, то годограф вектор-функции задает траекторию движущейся точки; вектор $\dot{\vec{r}}(t)$ задает скорость движущейся точки; вектор $\ddot{\vec{r}}(t)$ задает ускорение движущейся точки.

Геометрический смысл производной

Производная вектор-функции в точке есть вектор. Выясним его направление. Построим годограф вектор-функции и векторы $\vec{r}(t),\vec{r}(t+\Delta t)$. Вектор разности $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ направлен *по секущей* к годографу (рис.30). В пределе при $\Delta t\to 0$

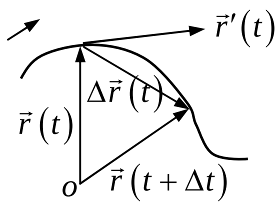

Рис.30

вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ превращается в вектор $\vec{r}'(t)$, а секущая – в касательную к годографу.

$\boxed{\text{Вектор } \vec{r}'(t) \text{ направлен } \textbf{\textit{по касательной к годографу}} \text{ вектор-функции } \vec{r}(t).}$

Правила дифференцирования

Правила дифференцирования скалярной функции и их вывод переносятся и на векторную функцию. Перечислим эти правила.

1) $\left[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r}_1{}'(t)+\vec{r}_2{}'(t)$,

2) $\left[f(t)\cdot\vec{r}(t)\right]' = f'(t)\cdot\vec{r}(t)+f(t)\cdot\vec{r}'(t)$,

$\left[\lambda\cdot\vec{r}(t)\right]' = \lambda\cdot\vec{r}'(t)$, ($\lambda$ – число),

$\left[f(t)\cdot\vec{c}\right]' = f'(t)\cdot\vec{c}$, ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

3) $\left[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r}_1{}'(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2{}'(t)$,

4) $\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r}_1{}'(t)\times\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2{}'(t)$,

5) для сложной функции $\vec{r}=\vec{r}\left(u(t)\right)$ имеем $\vec{r}_t{}' = \vec{r}_u{}'\cdot u_t{}'$.

6) если $\vec{r}(t)=\{x(t),\,y(t),\,z(t)\}$, то $\vec{r}'(t)=\{x'(t),\,y'(t),\,z'(t)\}$.

Дифференциал вектор-функции

Дифференциал вектор-функции определяется и вычисляется аналогично дифференциалу скалярной функции:

$$\boxed{d\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)\cdot dt\,.}$$

Если $\vec{r}(t)=\{x(t),\,y(t),\,z(t)\}$, то $d\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)dt=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}dt=\{dx,dy,dz\}$, т.е.

$$\boxed{d\vec{r}=\{dx,dy,dz\}.}$$

Геометрические приложения вектор-функции

Если задана вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то ее годограф – линия L – имеет векторно-параметрическое уравнение $\vec{r}=\vec{r}(t)$ (t – параметр), или координатно-параметрические уравнения:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\,.$$

Пусть $P_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на этой кривой, t_0 – значение параметра t в точке P_0. Тогда вектор $\vec{r}'(t_0)=\{x'(t_0),\,y'(t_0),\,z'(t_0)\}$ является направляющим вектором касательной прямой к линии L в точке P_0 и канонические ***уравнения касательной прямой*** имеют вид:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.}$$

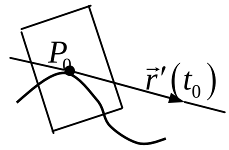

Рис.31

Плоскость, проходящая через точку касания P_0 перпендикулярно касательной прямой к линии L (рис.31), называется нормальной плоскостью линии L в точке P_0. Вектор $\vec{r}'(t_0)=\{x'(t_0),\, y'(t_0),\, z'(t_0)\}$ коллинеарен касательной прямой и, значит, перпендикулярен нормальной плоскости. Поэтому ***уравнение нормальной плоскости*** к линии L в точке P_0 имеет вид:

$$\boxed{x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0\,.}$$

Пример 9.1. Составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к линии $x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad z=3t$ в точке $P_0\left(1,\sqrt{3},\pi\right)$.

Решение. Для точки P_0 найдем значение параметра t_0: $\quad z=3t_0=\pi,\ t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Найдем касательный вектор к линии в точке P_0:

$$\vec{r}'(t_0)=\{x'(t_0),\, y'(t_0),\, z'(t_0)\}=\{-2\sin t_0,\, 2\cos t_0,\, 3\}=\left\{-\sqrt{3},1,3\right\}.$$

Запишем уравнение касательной прямой к линии в точке P_0

$$\frac{x-1}{-\sqrt{3}}=\frac{y-\sqrt{3}}{1}=\frac{z-\pi}{3}$$

и уравнение нормальной плоскости

$$-\sqrt{3}(x-1)+\left(y-\sqrt{3}\right)+3(z-\pi)=0\,.$$

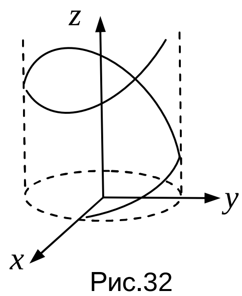

Рис.32

Отметим, что заданная линия есть винтовая линия: ее проекция на плоскость xoy есть окружность $x^2+y^2=4$, а третья координата $z=3t$ точки линии растет с ростом t (рис.32).

10. Понятие функции нескольких переменных и ее производных

Более подробно функции нескольких переменных будут рассмотрены далее. Здесь рассмотрим понятие частной производной, необходимое для изучения дифференциальных уравнений.

Определение. Переменная u называется функцией k переменных $x_1,\, x_2,\ldots x_k$, если каждой совокупности чисел $(x_1,\, x_2,\ldots x_k)$ из множества D соответствует единственное значение переменной u. При этом принята запись $u=f(x_1,\, x_2,\ldots x_k)$, а множество D называется областью определения функции u.

Приведем простейшие примеры функций нескольких переменных.

1. Объем прямого кругового цилиндра $V=\pi R^2 H$ есть функция двух переменных R и H, причем $R>0$ и $H>0$.
2. Функция $z=x^2+y^2$ есть функция переменных x и y, определенная на всей плоскости OXY.
3. Функция $u=\ln\left(1-x^2-y^2-z^2\right)$ является функцией трех переменных x, y, z, определенной на множестве $x^2+y^2+z^2<1$.

Введем понятие частной производной. Для простоты записи ограничимся функцией двух переменных $f(x,y)$. Рассмотрим полное приращение функции

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

и частные приращения функции по x и y:

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y), \qquad \Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Определение. Частными производными $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ функции $f(x,y)$ называются пределы $\boxed{f'_x(x,y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}}$, $\boxed{f'_y(x,y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}}$.

Приняты и другие обозначения: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Так как в определении, например, производной f'_x при вычислении $\Delta_x f$ меняется только x при неизменных других переменных, то отсюда вытекает следующее правило:

Чтобы вычислить частную производную от функции f по одному из ее аргументов, нужно вычислить производную функции f по этому аргументу, считая другие аргументы постоянными.

Пример 10.1.

1) $u = x^3 \sin y \;\Rightarrow\; u'_x = 3x^2 \sin y$, $u'_y = x^3 \cos y$,

2) $u = e^{2x+3y} + \ln z \;\Rightarrow\; u'_x = e^{2x+3y} \cdot 2$, $u'_y = e^{2x+3y} \cdot 3$, $u'_z = \dfrac{1}{z}$,

3) $z = x^y \;\Rightarrow\; z'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$.

Частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ являются функциями от x, y и от них можно снова находить частные производные по x и y. Они называются частными производными второго порядка:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y, \quad f''_{yx} = (f'_y)'_x, \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y.$$

Другие обозначения этих же производных: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$.

Аналогично определяются и частные производные более высоких порядков, например, $f'''_{xyx} = (f'_{xy})'_x$.

Производные, в которых идет дифференцирование по различным переменным, называются смешанными, например, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xyx}. Не доказывая, отметим, что смешанная производная, в случае ее непрерывности, не зависит от порядка дифференцирования, например, $f''_{yx} = f''_{xy}$, $f'''_{xyx} = f'''_{xxy} = f'''_{yxx}$.

Пример 10.2.

1). Для функции $f(x,y) = y e^x + x \sin\left(1+y^2\right)$ имеем: $f'_x = y e^x + \sin\left(1+y^2\right)$,

$f''_{xy} = e^x + \cos\left(1+y^2\right) \cdot 2y$, $f'_y = e^x + x\cos\left(1+y^2\right) \cdot 2y$, $f''_{yx} = e^x + \cos\left(1+y^2\right) \cdot 2y$.

2). Для функции $f(x,y,z) = x y^2 z^3$ имеем:

$$f'_x = y^2 z^3, \quad f''_{xz} = (f'_x)'_z = 3y^2 z^2, \quad f'''_{xzx} = 0, \quad f'''_{xzz} = 6y^2 z.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Для функции $u = x^y$ найти u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{yy}.

Ответ: $u'_x = y x^{y-1}$, $u'_y = x^y \ln x$, $u''_{xx} = y(y-1) x^{y-2}$, $u''_{yy} = x^y (\ln x)^2$.

2. Для функции $u = x^2 y^3 z^4$ найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Ответ: $24 x y^2 z^3$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.1. 288 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика./М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Ч.1. 352 с.
5. Высшая математика /под редакцией Яковлева Г.Н. М.: Высшая школа, 2004. 584 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа /под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука, 1996. 464 с.
7. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов /И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев . М.: Наука, 1980. 946 с.
8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк.,1997. Ч.1. 304 с.
11. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений /Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В.А. Ефименко и др.; под ред. Б.П. Демидовича. М.: ООО "Издательство Астрель", 2002. 495 с.

Учебно-методическое издание

Ревекка Максовна Минькова

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

ИД № 06263 от 12.11.2001г.

Подисано в печать 26.04.2005			Формат 60×84 1/16
Бумага типографская	Офсетная печать		Усл. печ.л. 3.13
Уч.-изд. л. 3.2	Тираж	Заказ	Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19