Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»
Институт образовательных информационных технологий

Функции нескольких переменных

Методические указания

для студентов дистанционной и заочной форм обучения

Печатается по решению редакционно-издательского
совета ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

Екатеринбург 2006

УДК 517.5: 517.28 (075.8)

Составитель Р.М. Минькова

Научный редактор доц. В.Б. Грахов

Функции нескольких переменных: методические указания по курсу «Высшая математика» / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ−УПИ, 2006. 26 с.

В методических указаниях рассмотрены дифференцирование, экстремум, геометрические приложения функции нескольких переменных. Приведено решение типовых задач. Предложены примеры для самостоятельного решения с ответами.

Работа предназначена для студентов дистанционной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 10 назв. Рис.5.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» и факультетом дистанционного образования.

1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение. Переменная u называется функцией k переменных $x_1, x_2, ...x_k$, если каждой совокупности чисел $(x_1, x_2, ...x_k)$ из множества D соответствует единственное значение переменной u. При этом принята запись $u = f(x_1, x_2, ...x_k)$, а множество D называется областью определения функции u.

Приведем простейшие примеры функций нескольких переменных.

1. Объем прямого кругового цилиндра $V = \pi R^2 H$ есть функция двух переменных R и H, причем $R > 0$ и $H > 0$.
2. Функция $z = x^2 + y^2$ есть функция переменных x и y, определенная на всей плоскости OXY. Графиком этой функции называется множество точек (x, y, z), координаты которых удовлетворяют уравнению $z = x^2 + y^2$, т.е. график функции есть параболоид (рис. 1).

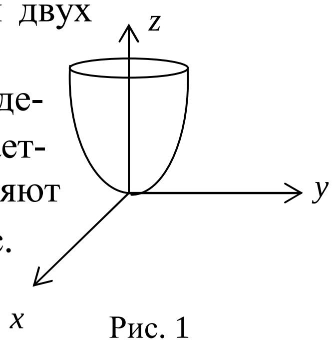

Рис. 1

3. Функция $u = \ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)$ является функцией трех переменных x, y, z, определенной на множестве $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Геометрическое изображение функции трех переменных с помощью ее графика невозможно, так как для этого потребовалось бы пространство четырех измерений.

Для изучения функции k переменных введем ***расстояние*** ρ между двумя точками $M(x_1, x_2, ..., x_k)$ и $N(y_1, y_2, ..., y_k)$:

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_k - y_k)^2}\ .$$

При $k = 2$ расстояние $\rho(M, N)$ есть обычное расстояние между точками плоскости. При $k = 3$ расстояние $\rho(M, N)$ есть расстояние между точками пространства.

Введем понятие окрестности точки M_0. ***Окрестностью точки*** M_0 радиуса R называется множество точек M таких, что $\rho(M, M_0) < R$. Например, на плоскости OXY окрестность точки M_0 есть круг с центром в точке M_0 радиуса R (рис. 2).

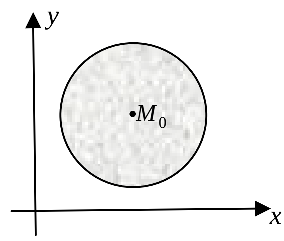

Рис.2

Говорят, что последовательность точек M_n сходится к точке M $(M_n \to M)$, если $\rho(M_n, M) \to 0$ при $n \to \infty$.

Предел функции нескольких переменных обобщает понятие предела функции одной переменной.

Определение. Конечное число b называется пределом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любой последовательности точек M_n, сходящейся к точке M_0 $(M_n \neq M_0)$, соответствующая последовательность значений функции $f(M_n)$ сходится к числу b, т.е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b, \text{ если } f(M_n) \to b \text{ для } \forall M_n \to M_0 \ \left(M_n \neq M_0\right).$$

Для функции двух переменных используют и другую запись

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b.$$

Из определения следует, что предел b не зависит от способа приближения точки M к точке M_0.

Свойства пределов функции одной переменной остаются справедливыми и для функций многих переменных.

Пример 1.1

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{x + y - 1}{x^2 + xy^2 + 3} = \dfrac{0 + 2 - 1}{0 + 0 + 3} = \dfrac{1}{3}$.

В этом примере мы воспользовались тем, что предел элементарной функции в области ее определения равен значению функции в точке.

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \cdot \sin\dfrac{1}{y} = 0$.

В этом примере мы воспользовались тем, что x есть бесконечно малая функция, $\sin\dfrac{1}{y}$ есть ограниченная функция (по модулю меньшая единицы), а произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{xy \to 0} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{x \to 3} x = 1 \cdot 3 = 3$.

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом.

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует, т.к. функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ стремится к разным числам при различных способах приближения точки (x, y) к точке $(0, 0)$:

$$\text{при } x = y \text{ имеем } \lim_{x = y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{при } x = 2y \text{ имеем } \lim_{x = 2y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{2y^2}{5y^2} = \frac{2}{5}.$$

Определение. Функция $f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0, если

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).}$$

Свойства непрерывной в точке функции нескольких переменных аналогичны свойствам функции одной переменной.

Пример 1.2. 1). Функция $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ – элементарная и поэтому непрерывна во всех точках, кроме точки $(0, 0)$, где функция не определена.

2) Функция $f(x, y) = \dfrac{1}{y - x^2}$ – элементарная и поэтому непрерывна во всех точках, кроме точек линии $y = x^2$, где функция не определена.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{e^{x+y}}{x-y}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$.

Ответ: а) e^3, б) 0 , в) предел не существует.

2. Исследовать на непрерывность функцию:

а) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$, б) $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}, & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ или } y=0.\end{cases}$

Ответ: а). Линия разрыва – окружность $x^2+y^2=1$.

б). Линии разрыва $x=0$, $y=0$; в точке (0,0) функция непрерывна.

2. Дифференцирование функции нескольких переменных

2.1. Частные производные

Для простоты записи ограничимся функцией двух переменных $f(x,y)$. Рассмотрим понятия ***полного приращения*** функции

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

и ***частных приращений*** функции по x и y:

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y), \qquad \Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Определение. Частными производными $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ функции $f(x,y)$ называются пределы $\boxed{f'_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}}$, $\boxed{f'_y(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}}$.

Приняты и другие обозначения: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Так как в определении, например, производной f'_x при вычислении $\Delta_x f$ меняется только x при неизменных других переменных, то отсюда вытекает следующее ***правило:***

Чтобы вычислить частную производную от функции f по одному из ее аргументов, нужно вычислить производную функции f по этому аргументу, считая другие аргументы постоянными.

Пример 2.1.

1) $u=x^3\sin y \ \Rightarrow\ u'_x=3x^2\sin y$, $u'_y=x^3\cos y$,

2) $u=e^{2x+3y}+\ln z \ \Rightarrow\ u'_x=e^{2x+3y}\cdot 2$, $u'_y=e^{2x+3y}\cdot 3$, $u'_z=\dfrac{1}{z}$,

3) $z=x^y \ \Rightarrow\ z'_x=y\cdot x^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$.

Частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ являются функциями от x, y и от этих функций можно снова находить частные производные по x и y. Они называются частными производными второго порядка:

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x, \qquad f''_{xy}=(f'_x)'_y, \qquad f''_{yx}=(f'_y)'_x, \qquad f'_{yy}=(f'_y)'_y.$$

Другие обозначения этих же производных: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Аналогично определяются и частные производные более высоких порядков, например, $f'''_{xyx}=(f'_{xy})'_x$.

Производные, в которых идет дифференцирование по различным переменным, называются смешанными, например, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xyx}. Не доказывая, отметим, что ***смешанная производная***, в случае ее непрерывности, ***не зависит от порядка дифференцирования***, например, $f''_{yx}=f''_{xy}$, $f'''_{xyx}=f'''_{xxy}=f'''_{yxx}$.

Пример 2.2.

1). Для функции $f(x,y)=ye^x+x\sin\left(1+y^2\right)$ имеем: $f'_x=ye^x+\sin\left(1+y^2\right)$,

$$f''_{xy}=e^x+\cos\left(1+y^2\right)\cdot 2y, \quad f'_y=e^x+x\cos\left(1+y^2\right)\cdot 2y, \quad f''_{yx}=e^x+\cos\left(1+y^2\right)\cdot 2y.$$

2). Для функции $f(x,y,z)=xy^2z^3$ имеем:

$$f'_x=y^2z^3, \quad f''_{xz}=(f'_x)'_z=3y^2z^2, \quad f'''_{xzx}=0, \quad f'''_{xzz}=6y^2z.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Для функции $u=x^y$ найти u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{yy}.

Ответ: $u'_x=yx^{y-1}$, $u'_y=x^y\ln x$, $u''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $u''_{yy}=x^y(\ln x)^2$.

2. Для функции $u=\ln\left(x^2+y\right)$ найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2\left(y-x^2\right)}{\left(y+x^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{4x}{\left(x^2+y\right)^3}$.

3. Для функции $u=x^2y^3z^4$ найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

Ответ: $24xy^2z^3$.

2.2. Дифференцируемые функции. Дифференциалы

Напомним, что если функция одной переменной $f(x)$ дифференцируема в точке x, то ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ есть функция бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

Аналогично, функция двух переменных $f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке (x,y), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x,y)=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+o(\rho)}, \qquad (2.1)$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$.

Аналогично для дифференцируемой функции трех переменных

$$\Delta f(x,y,z)=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y+f'_z\Delta z+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$.

Отметим, что если функция дифференцируема в точке, то она будет непрерывной в этой точке, так как приращение функции в силу равенства (2.1) будет бесконечно малым, если приращения аргументов Δx и Δy бесконечно малы.

В равенстве (2.1) выражение $f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$ называют ***дифференциалом*** функции $f(x,y)$ и обозначают $d\,f(x,y)$. Таким образом,

$$\boxed{df(x,y)=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y}\,, \qquad (2.2)$$

а равенство (2.1) принимает вид

$$\Delta f(x,y)=d\,f(x,y)+o(\rho).$$

Так как $\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$, то равенство $\Delta f(x_0,y_0)=d\,f(x_0,y_0)+o(\rho)$ можно переписать так:

$$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+o(\rho)} \text{ или } \boxed{f(M)=f(M_0)+df(M_0)+o(\rho)}. \qquad (2.3)$$

Если пренебречь бесконечно малой $o(\rho)$, заменить $df(x_0,y_0)$ по формуле (2.2) и учесть, что $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, то получим приближенное равенство:

$$\boxed{f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}. \qquad (2.4)$$

Это равенство позволяет ***линеаризовать*** функцию, т.е. заменить функцию $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) ***линейной*** функцией.

Равенство (2.4) используется также для приближенного вычисления значения функции $f(x,y)$, если известно значение функции $f(x_0,y_0)$.

Пример 2.3. Линеаризовать функцию $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$ в окрестности точки $x_0=1$, $y_0=1$.

Решение. Найдем значения функции и ее частных производных в точке (x_0,y_0):

$$f(x_0,y_0)=\ln\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1\right)=\ln 1=0,$$

$$f'_x=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3}, \qquad f'_x(x_0,y_0)=\frac{1}{3},$$

$$f'_y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad f'_y(x_0,y_0)=\frac{1}{4}.$$

Теперь воспользуемся приближенным равенством (2.4)

$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)\approx\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{4}(y-1).$$

Определим дифференциалы высших порядков. Из равенства (2.2) следует, что дифференциал функции $df(x,y)=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$ при фиксированных Δx и Δy есть снова функция от переменных x и y. Ее дифференциал называют

вторым дифференциалом функции $f(x,y)$ и обозначают $d^2 f(x,y)$. Таким образом, $\boxed{d^2 f(x,y) = d(df(x,y))}$ при фиксированных Δx, Δy.

Выведем формулу для вычисления $d^2 f(x,y)$:

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = (df)'_x \cdot \Delta x + (df)'_y \cdot \Delta y =$$

$$= (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)'_x \cdot \Delta x + (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)'_y \cdot \Delta y = \left(f''_{xx} (\Delta x)^2 + f''_{yx} \Delta y \Delta x \right) + \left(f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{yy} (\Delta y)^2 \right).$$

Таким образом,

$$\boxed{d^2 f(x,y) = f''_{xx} (\Delta x)^2 + 2 f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{yy} (\Delta y)^2}. \tag{2.5}$$

Дифференциал второго порядка позволяет вывести (делать этого не будем) приближенную формулу более точную, чем формула (2.3):

$$\boxed{f(M) = f(M_0) + d\, f(M_0) + \tfrac{1}{2} d^2 f(M_0) + o\left(d^2 f(M_0)\right)}. \tag{2.6}$$

Дифференциалы первого и второго порядков будут применены для исследования функции $f(x,y)$ на экстремум.

2.3. Сложные функции и их дифференцирование

Пусть $z = f(x,y)$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда суперпозиция этих трех функций, т.е. $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ есть ***сложная функция*** одной переменной t. Переменные x, y называют промежуточными переменными, переменную t называют независимой.

Теорема. Пусть $f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ − дифференцируемые функции. Тогда производная сложной функции $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ равна

$$\boxed{z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t\,.} \tag{2.7}$$

Доказательство. Придадим t приращение Δt. Тогда переменные x, y получат приращение $\Delta x, \Delta y$ и переменная z получит приращение Δz. Так как функция $z = f(x,y)$ − дифференцируема, то

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + o(\rho).$$

Разделим равенство на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = z'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + z'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}\ . \tag{2.8}$$

Так как

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t}, \quad \frac{\rho}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,,$$

то равенство (2.8) примет вид: $\dfrac{\Delta z}{\Delta t} = z'_x \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta t} + z'_y \cdot \dfrac{\Delta y}{\Delta t} + \dfrac{o(\rho)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$.

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t + 0 \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t\,.$$

Полученная формула (2.7) обобщается на сложные функции с любым числом промежуточных и независимых переменных. Справедливо следующее общее правило.

Для отыскания производной сложной функции по независимому аргументу надо ее производную по каждому промежуточному аргументу умножить на производную от этого промежуточного аргумента по независимому аргументу и сложить эти произведения.

Поясним это правило в следующих случаях:

1) $z = f(u,v)$, где $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$

Тогда $z = f(u(x,y), v(x,y))$ есть сложная функция независимых переменных x, y и

$$\boxed{\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y \end{aligned}}.$$

2) $z = f(x,y,t)$ и $x = x(t),\ y = y(t)$.

Тогда $z = f(x(t), y(t), t)$ есть сложная функция ***одной*** независимой переменной t. Поэтому ее производную обозначим $\frac{dz}{dt}$ (полная производная), а не $\frac{\partial z}{\partial t}$ (частная производная). Промежуточные переменные – x, y, t. Итак, согласно общему правилу имеем:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}.}$$

Пример 2.4. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial t}$ и полную производную $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^2 + y^3 + \operatorname{arctg} t$, $x = \sin t,\ y = \cos t$.

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial z}{\partial t} = (\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}$, то

$$\frac{dz}{dt} = 2x\cdot\cos t + 3y^2\cdot(-\sin t) + \frac{1}{1+t^2} = 2\sin t\cdot\cos t - 3\cos^2 t\cdot\sin t + \frac{1}{1+t^2}.$$

Пример 2.5. Показать, что функция $z = \varphi(x^2+y^2)$, где $\varphi(x^2+y^2)$ − произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение. Введем вспомогательную переменную $u = x^2 + y^2$. Тогда $z = \varphi(u)$, где $u = x^2 + y^2$. Поэтому $z'_x = \varphi'_u\cdot u'_x = \varphi'_u\cdot 2x$, $z'_y = \varphi'_u\cdot u'_y = \varphi'_u\cdot 2y$;

$$yz'_x - xz'_y = \varphi'_u\cdot 2xy - \varphi'_u\cdot 2yx = 0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{xy}$, где $y = \varphi(x)$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\cdot\varphi'(x)$.

2. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln\sin\frac{x}{y}$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$. *Ответ:* $\frac{du}{dt} = \frac{t}{y}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{y}\right)\left(6 - \frac{x}{y^2}\right)$.

3. Показать, что функция $w = f(u,v)$, где $u = x + at$, $v = y + bt$, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}$.

2.4. Неявные функции и их дифференцирование

Функция, заданная в виде $y = f(x)$, называется явной функцией. Если же задано уравнение $F(x,y) = 0$, не разрешенное относительно y, то оно может определить функцию $y = y(x)$, заданную неявно. Например, уравнение $x^3 + y^3 - 1 = 0$ определяет функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$, заданную неявно.

Если неявная функция $y = y(x)$ задана уравнением $F(x,y) = 0$, то для нахождения производной $y'(x)$ необязательно разрешать уравнение $F(x,y) = 0$ относительно y; следует продифференцировать это уравнение по x, учитывая, что y есть функция от x.

Пример 2.6. Для функции $y(x)$, заданной уравнением $e^{xy} + xy = 0$, найти производные $y'(x), y''(x)$.

Решение. Продифференцируем равенство $e^{xy} + xy = 0$ по x, учитывая, что $y = y(x)$: $e^{xy} \cdot (xy)'_x + (xy)'_x = 0$ или $(e^{xy} + 1) \cdot (xy)'_x = 0$.

Так как $e^{xy} + 1 \neq 0$, то $(xy)'_x = 0$. Отсюда получаем $1 \cdot y + x \cdot y'_x = 0$ или $y'_x = -\frac{y}{x}$.

Для отыскания y''_{xx} продифференцируем по x равенство $y'_x = -\frac{y}{x}$, учитывая, что $y = y(x)$: $y''_{xx} = -\frac{y'_x \cdot x - y \cdot 1}{x^2}$. Подставляя $y'_x = -\frac{y}{x}$, получим $y''_{xx} = \frac{2y}{x^2}$.

Теперь рассмотрим функции, неявно заданные уравнением $F(x,y,z) = 0$. Из этого уравнения, если возможно, выразим одну из переменных, например z, через две другие переменные x и y, т.е. найдем решение $z = z(x,y)$ исходного уравнения $F(x,y,z) = 0$. Это решение $z = z(x,y)$ называется функцией, неявно заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ неявно задает две функции $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, определенные в единичном круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Для отыскания частных производных функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$, следует продифференцировать это уравнение сначала по x, затем по y, учитывая, что x, y – независимые переменные, а z − функция от x, y.

Пример 2.7. Для функции $z = z(x,y)$, неявно заданной уравнением $e^z - xyz = 0$, найти производные z'_x, z'_y.

Решение. Продифференцируем равенство $e^z - xyz = 0$ сначала по x, затем по y, учитывая, что x, y – независимые переменные, а z − функция от x, y:

$$e^z\cdot z'_x - y\cdot\left(1\cdot z + x\cdot z'_x\right) = 0 \;\Rightarrow\; z'_x = \frac{yz}{e^z - xy}, \text{ если } e^z - xy \neq 0,$$

$$e^z\cdot z'_y - x\cdot\left(1\cdot z + y\cdot z'_y\right) = 0 \;\Rightarrow\; z'_y = \frac{xz}{e^z - xy}, \text{ если } e^z - xy \neq 0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Пусть y есть та функция от x, заданная неявно уравнением $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$, которая принимает значение $y_0 = 1$ при $x_0 = 1$. Найти $y'_x(1)$, $y''_{xx}(1)$. *Ответ:* $y'_x(1) = -1$, $y''_{xx}(1) = -8$.

2. Функция z переменных x, y задана неявно уравнением $x^3 + 2y + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$. Найти z'_x, z'_y. *Ответ:* $z'_x = \dfrac{x^2 - yz}{xy - z^2}$, $z'_y = \dfrac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}$.

3. Геометрические приложения

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$. Рассмотрим на поверхности точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Будем предполагать, что $F'_x(M_0)$, $F'_y(M_0)$, $F'_z(M_0)$ одновременно не равны нулю. На поверхности через точку M_0 проведем всевозможные линии L и касательные прямые к этим линиям (рис. 3). Справедлива следующая теорема.

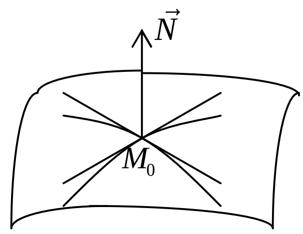

Рис.3

Теорема. Касательные прямые, проведенные к всевозможным линиям поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке M_0, лежат в одной плоскости, называемой касательной плоскостью. Нормальный вектор касательной плоскости

$$\boxed{\vec{N} = \{F'_x(M_0),\, F'_y(M_0),\, F'_z(M_0)\}}.$$

Доказательство. Пусть произвольная линия L, лежащая на поверхности и проходящая через ее точку M_0, задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и точке M_0 соответствует значение параметра $t = t_0$. Так как линия L лежит на поверхности, то координаты любой ее точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ удовлетворяют уравнению поверхности $F(x,y,z) = 0$, т.е. $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Продифференцируем это равенство по t: $F_x{}'\cdot x_t{}' + F_y\cdot y_t{}' + F_z{}'\cdot z_t{}' = 0$. Равенство верно для любого t, в частности для значения $t = t_0$, соответствующего точке M_0, т.е.

$$F_x{}'(M_0)\cdot x_t{}'(t_0) + F_y{}'(M_0)\cdot y_t{}'(t_0) + F_z{}'(M_0)\cdot z_t{}'(t_0) = 0.$$

Левая часть этого равенства равна скалярному произведению вектора $\vec{N} = \{F_x{}'(M_0), F_y{}'(M_0), F_z{}'(M_0)\}$ и вектора $\vec{S} = \{x_t{}'(t_0), y_t{}'(t_0), z_t{}'(t_0)\}$. Следовательно, $\vec{N}\cdot\vec{S} = 0$, т.е. векторы $\vec{S}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны.

Вектор $\vec{S}$, как известно, есть касательный вектор к линии L, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Вектор $\vec{N}$ определяется только уравнением поверхности и не зависит от линии L. Таким образом, касательные прямые, проведенные к произвольным линиям поверхности в точке M_0, перпендикулярны одному и тому же вектору $\overline{N}$, т.е. лежат в одной плоскости − в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{N}$.

Зная нормальный вектор $\overline{N}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$ касательной плоскости и точку касания $M_0(x_0,y_0,z_0)$, можно записать ***уравнение касательной плоскости*** *к поверхности* $F(x,y,z)=0$ в точке M_0:

$$\boxed{F_x'(M_0)\cdot(x-x_0)+F_y'(M_0)\cdot(y-y_0)+F_z'(M_0)\cdot(z-z_0)=0.}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания, называется нормалью к поверхности. Нормальный вектор касательной плоскости $\overline{N}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$ является направляющим вектором нормали. Поэтому ***уравнение нормали*** к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 имеет вид:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}.}$$

Пример 3.1. На поверхности $3x^2+y^2+2z^2-84=0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $6x+y+4z=96$.

Решение. Найдем нормальный вектор касательной плоскости $\overline{N}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}=\{6x_0,2y_0,4z_0\}$ и нормальный вектор заданной плоскости $\overline{N}_1=\{6,1,4\}$. Так как касательная и заданная плоскости параллельны, то их нормальные векторы параллельны $\overline{N}\parallel\overline{N}_1$.

Условием параллельности двух векторов является пропорциональность их одноименных координат, т.е. $\frac{6x_0}{6}=\frac{2y_0}{1}=\frac{4z_0}{4}=\lambda$. Тогда $x_0=\lambda$, $y_0=\frac{\lambda}{2}$, $z_0=\lambda$.

Точка касания $M(x_0,y_0,z_0)$ лежит на заданной поверхности, значит ее координаты $x_0=\lambda$, $y_0=\frac{\lambda}{2}$, $z_0=\lambda$ удовлетворяют уравнению поверхности, т.е.

$$3\lambda^2+\frac{\lambda^2}{4}+2\lambda^2-84=0 \text{ и } \lambda=\pm2.$$

При $\lambda=2$ получим искомую точку $M_1(2,1,2)$; при $\lambda=-2$ получим искомую точку $M_2(-2,-1,-2)$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в точке (1,2,-1).

Ответ: $x+11y+5z-18=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

2. Для поверхности $z-xy=0$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к прямой $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$. *Ответ:* $2x+y-z=2$.

4. Экстремумы функции

4.1. Локальный экстремум функции

Локальный экстремум (максимум или минимум) для функции нескольких переменных определяется так же, как и для функции одной переменной:

1. Функция $f(M)$ имеет локальный ***максимум*** в точке M_0, если $f(M) < f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0.

2. Функция $f(M)$ имеет локальный ***минимум*** в точке M_0, если $f(M) > f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0.

Отметим, что в окрестности точки экстремума M_0 приращение функции $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0)$ сохраняет знак, а именно $\Delta f(M_0) < 0$ для точки максимума, и $\Delta f(M_0) > 0$ для точки минимума.

Для исследования функции на экстремум используют необходимое условие и достаточное условие экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(M)$ имеет экстремум в точке M_0. Тогда в этой точке ***каждая частная производная равна нулю или не существует.***

Доказательство. Действительно, пусть, например, функция двух переменных $f(x,y)$ имеет максимум в точке (x_0, y_0). Тогда $f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$. Это означает, что функция ***одной*** переменной $f(x, y_0)$ имеет максимум в точке x_0. Следовательно, ее производная $f'_x(x, y_0)$ в точке x_0 равна нулю или не существует. Аналогично доказывается, что производная $f'_y(x_0, y_0)$ равна нулю или не существует.

Отметим, что необходимый признак экстремума не является достаточным. Например, для функции $z = x^2 - y^2$ её частные производные $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$ равны нулю в точке $(0,0)$, но $z(0,y) < z(0,0)$, а $z(x,0) > z(0,0)$, поэтому в точке $(0,0)$ экстремума нет.

Таким образом, для исследования функции на экстремум нужно

1) найти точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют (их называют критическими точками),
2) исследовать функцию в критических точках, используя достаточные признаки экстремума или определение экстремума.

Рассмотрим достаточные признаки экстремума.

Теорема (достаточное условие экстремума** функции $f(x,y)$**).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ критическая точка функции $f(x,y)$;

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0), \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда 1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: минимум при $A > 0$; максимум при $A < 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.6):

$$f(M) = f(M_0) + d\,f(M_0) + \tfrac{1}{2} d^2 f(M_0) + o\left(d^2 f(M_0)\right). \qquad (4.1)$$

В критической точке M_0 для дифференцируемой функции имеем:

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0, \quad df(M_0) = f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy = 0.$$

Кроме того, $f(M) - f(M_0) = \Delta f(M_0)$. Поэтому равенство (4.1) примет вид:

$$\Delta f(M_0) = \tfrac{1}{2} d^2 f(M_0) + o\left(d^2 f(M_0)\right).$$

Величина $o\left(d^2 f(M_0)\right)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $d^2 f(M_0)$, поэтому она не влияет на знак $\Delta f(M_0)$; знак $\Delta f(M_0)$ совпадает со знаком $d^2 f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0. Исследуем знак $d^2 f(M_0)$, используя формулу (2.5):

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(M_0)\cdot(\Delta x)^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\cdot\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)\cdot(\Delta y)^2 = A\cdot(\Delta x)^2 + 2B\cdot\Delta x\Delta y + C\cdot(\Delta y)^2.$$

Вынесем за скобку $(\Delta y)^2$. Тогда $d^2 f(M_0) = (\Delta y)^2\left[A\cdot(\Delta x/\Delta y)^2 + 2B\cdot(\Delta x/\Delta y) + C\right]$.

Выражение в квадратных скобках является квадратным трехчленом относительно $\Delta x/\Delta y$. Его дискриминант $D = 4\cdot B^2 - 4A\cdot C = -4\cdot\Delta$. Рассмотрим два случая: $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$.

а). Если $\Delta > 0$, то дискриминант квадратного трехчлена $D < 0$. Тогда знак $d^2 f(M_0)$, а значит, и знак $\Delta f(M_0)$ совпадает со знаком A (рис.4,а, 4,б). При $A > 0$ имеем $\Delta f(M_0) > 0$ и, следовательно, в точке M_0 функция $f(M)$ имеет минимум. При $A < 0$ имеем $\Delta f(M_0) < 0$ и, следовательно, в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум.

б). Если $\Delta < 0$, то дискриминант квадратного трехчлена $D > 0$. Тогда $d^2 f(M_0)$, а значит, и $\Delta f(M_0)$ изменяет знак в окрестности точки M_0 (рис.4,в и 4,г). Поэтому функция $f(M)$ не имеет экстремума в точке M_0.

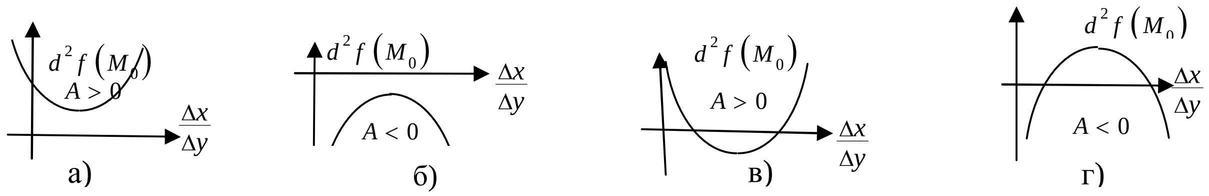

Рис.4

Аналогичный достаточный признак экстремума имеет место и для функции многих переменных $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Теорема (достаточное условие экстремума** функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$**).

Пусть M_0 – критическая точка функции $f(M)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0) = A_{ik}$,

$$\Delta_1 = A_{11},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$ Тогда

1) если $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ положительны, то M_0 − точка минимума функции $f(M)$;

2) если знаки $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ чередуются, начиная со знака минус, то M_0 − точка максимума.

Пример 4.1. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y)=-\frac{2}{3}x^3+2xy-y^2-1$.

Решение. Найдем критические точки функции из условия $f'_x=0$, $f'_y=0$.

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_x=-2x^2+2y=0, \\ f'_y=2x-2y=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=x^2, \\ y=x. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x=y=0$ и $x=y=1$, т.е. функция $f(x,y)$ имеет две критические точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$.

Для исследования этих точек на экстремум вычислим производные второго порядка и определитель Δ:

$$f''_{xx}=-4x\,,\quad f''_{xy}=2\,,\quad f''_{yy}=-2\,;\quad \Delta=\begin{vmatrix} -4x & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=8x-4.$$

В точке M_1 экстремума нет, так как $\Delta=-4<0$.

В точке M_2 функция имеет экстремум, так как $\Delta=4>0$, причем максимум, так как $A=f''_{xx}(1,1)=-4<0$. Максимальное значение функции $z_{\max}=f(1,1)=-\frac{2}{3}$.

Пример 4.2. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y)=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+xy+1.$$

Решение. Для отыскания критических точек функции решим систему:

$$\begin{cases} f'_x=2xy^2+x+y=0, \\ f'_y=2x^2y+y+x=0, \end{cases} \Rightarrow\ 2xy^2=2x^2y\ \Rightarrow\ x=y\,.$$

Подставив $x=y$ в первое уравнение системы, получим $2x^3+2x=0$ или $2x(x^2+1)=0$. Поэтому $x=0$. Тогда и $y=0$. Итак мы получили критическую точку $M_0(0,0)$. Вычислим частные производные второго порядка:

$$f''_{xx}=2y^2+1\,,\quad f''_{xy}=4xy+1\,,\quad f''_{yy}=2x^2+1\,.$$

Тогда $A=f''_{xx}(M_0)=1$, $B=f''_{xy}(M_0)=1$, $C=f''_{yy}(M_0)=1$ и $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

В этом случае достаточный признак ответа не дает. Покажем, что точка M_0 есть точка минимума, используя определение. Запишем функцию $f(x,y)$ в виде: $f(x,y)=(xy)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2+1$. Очевидно, что $f(x,y)\ge 1$, причем $f(x,y)=1$ только при $x=y=0$. Поэтому точка $(0,0)$ есть точка минимума функции. Отметим, что $f_{\min}=1$.

Пример 4.3. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z)=-x^2-y^2-10z^2+4xz+3yz-2x-y+13z+5\,.$$

Решение. Найдем критические точки функции из системы уравнений

$$\begin{cases} f'_x=-2x+4z-2=0, \\ f'_y=-2y+3z-1=0, \\ f'_z=-20z+4x+3y+13=0. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 2, второе – на $3/2$ и сложим с третьим уравнением.

Получим: $-7{,}5z+7{,}5=0 \Rightarrow z=1$. Тогда из 1-го уравнения $x=1$, из 2-го уравнения $y=1$. Итак, функция $f(x,y,z)$ имеет единственную критическую точку $M_0(1,1,1)$. Для ее исследования вычислим частные производные 2-го порядка:

$$f''_{xx}=-2\ ,\quad f''_{xy}=0,\quad f''_{xz}=4,\quad f''_{yx}=0,\quad f''_{yy}=-2\ ,\quad f''_{yz}=3,\quad f''_{zx}=4\ ,\quad f''_{zy}=3\ ,\quad f''_{zz}=-20\,.$$

Составим из этих производных определители

$$\Delta_1=-2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4\ ,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ 4 & 3 & -20\end{vmatrix}=-30.$$

Так как знаки Δ_1, Δ_2, Δ_3 чередуются, начиная со знака минус, то M_0 есть точка максимума функции $f(x,y,z)$ и $f_{\max}=f(1,1,1)=10$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Исследовать на экстремум функции двух переменных:

а) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$, б) $z=(x-1)^2-2y^2$, в) $z=1-(x^2+y^2)^{2/3}$.

Ответы: а) $z_{\min}=-1$ при $x=1,\ y=0$, б) экстремумов нет, в) $z_{\max}=1$ при $x=0,\ y=0$.

2. Исследовать на экстремум функцию трех переменных $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ в области $x>0,\ y>0,\ z>0$. *Ответ:* $u_{\min}=4$ при $x=1/2,\ y=1,\ z=1$.

4.2. Глобальный экстремум функции

Требуется найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции не в окрестности точки (локальный экстремум), а в некоторой области (глобальный экстремум). Наибольшее (наименьшее) значение функции может достигаться либо внутри области в точках локального экстремума (а значит, в критических точках), либо на границе области.

Поэтому получаем следующий алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z=f(M)$ в области D:

1) найти критические точки функции $f(M)$, выбрать из них те, которые лежат внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе;
3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Пример 4.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 4$.

Решение. 1). Найдем критические точки функции в круге: $\begin{cases} z'_x=2x=0,\\ z'_y=-2y=0.\end{cases}$

Критическая точка $M_0(0,0)$ лежит в заданном круге и $z(0,0)=0$.

2). На границе круга $x^2+y^2=4$, или $y^2=4-x^2$ $(-2\le x\le 2)$, и поэтому функция z примет вид: $z=x^2-(4-x^2)=2x^2-4$. Найдем критические точки получившейся функции: $z'_x=4x=0$ при $x=0$. В критической точке значение функции $z=-4$, на концах отрезка $[-2,2]$ значение функции $z=4$.

3). Из получившихся значений функции $z=0$, $z=-4$, $z=4$ выберем наибольшее значение $z=4$ (оно достигается в точках $(\pm 2,0)$) и наименьшее значение $z=-4$ (оно достигается в точках $(0,\pm 2)$).

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z=x^3+y^3-3xy \text{ в области } 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 2.$$

Ответ: $z_{\max}=13$ при $x=2$, $y=-1$; $z_{\min}=-1$ при $x=y=1$ и при $x=0$, $y=-1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2y$ в области $x^2+y^2\le 1$.

Ответ: $z_{\max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=\sqrt{\frac{1}{3}}$; $z_{\min}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, - $y=-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

4.3. Условный экстремум функции

Выше рассматривалась задача об экстремуме функции нескольких переменных, при этом на независимые переменные не накладывалось никаких ограничений. На практике приходится иметь дело с экстремумом функции нескольких переменных, когда эти переменные связаны некоторыми условиями – уравнениями связи. Например, требуется найти экстремум функции $f(x,y,z)$ на поверхности с уравнением $F(x,y,z)=0$ или на линии $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$, заданной пересечением двух поверхностей.

Рассмотрим два метода отыскания условного экстремума.

Сведение к безусловному экстремуму

Пусть требуется найти экстремум функции $u=f(x,y,z)$ при наличии связи $F(x,y,z)=0$. Предположим, что из уравнения связи легко выразить одну из переменных, например z, через две другие переменные x, y: $z=\varphi(x,y)$. Подставим найденное z в функцию u: $u=f(x,y,\varphi(x,y))=g(x,y)$. Мы получили функцию двух переменных $g(x,y)$. Так как связь между переменными x, y, z уже учтена, то остается найти безусловный экстремум полученной функции $g(x,y)$.

Рассмотрим случай экстремума функции трех переменных $u=f(x,y,z)$ при наличии двух уравнений связи: $F(x,y,z)=0$ и $G(x,y,z)=0$. Из двух уравнений связи можно выразить две переменные через третью переменную, например, $y=y(x)$, $z=z(x)$. Подставляя $y=y(x)$ и $z=z(x)$ в функцию u, получим: $u=f(x,y(x),z(x))=g(x)$. Так как связь между переменными x, y, z уже учтена, то остается найти безусловный экстремуму полученной функции $g(x)$.

Аналогично этот метод применяется и для отыскания экстремума функции n переменных при наличии k уравнений связи $(k<n)$.

Пример 4.5. Найти экстремум функции $u=x^2+y^2+z^2$, если x, y, z удовлетворяют уравнениям связи $x+y-3z+7=0$, $x-y+z-3=0$.

Решение. Из двух уравнений связи выразим две переменные $y = 2x - 1$, $z = x + 2$ и подставим в функцию u: $u = x^2 + (2x-1)^2 + (x+2)^2$. Исследуем полученную функцию одной переменной на экстремум:

$$u'_x = 2x + 4(2x-1) + 2(x+2) = 12x = 0 \text{ при } x = 0.$$

При переходе через точку $x = 0$ производная u'_x меняет знак с $(-)$ на $(+)$, т.е. функция u имеет в этой точке минимум, причем $u_{\min} = 5$ достигается при $x = 0$, $y = -1$, $z = 2$.

Метод множителей Лагранжа

Этот метод применяется, когда из уравнений связи трудно или невозможно выразить одни переменные через другие. Изложим алгоритм этого метода (без его обоснования).

Для отыскания условного экстремума функции $f(x,y,z)$ при наличии связей $F(x,y,z,)=0$, $G(x,y,z,)=0$ нужно:

1) составить вспомогательную функцию Лагранжа $\varPhi$ следующим образом:
$$\varPhi = f(x,y,z) + \lambda \cdot F(x,y,z) + \mu \cdot G(x,y,z);$$
2) найти ее критические точки из уравнений $\frac{\partial \varPhi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial \varPhi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial \varPhi}{\partial z}=0$ и уравнений связи $F(x,y,z,)=0$, $G(x,y,z,)=0$;
3) исследовать критические точки на экстремум, исходя из геометрических или физических соображений.

Пример 4.6. На поверхности $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от плоскости $3x + 4y + 12z = 288$.

Решение. Рассмотрим точку $M(x,y,z)$, лежащую на заданной поверхности. Расстояние от точки M до плоскости $3x + 4y + 12z = 288$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|3x+4y+12z-288|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{|3x+4y+12z-288|}{13}. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Чтобы исследовать расстояние на экстремум достаточно исследовать на экстремум более простую функцию $f(x,y,z) = 3x + 4y + 12z - 288$, причем надо учесть, что точка $M(x,y,z)$ не произвольная точка пространства, а лежит на заданной поверхности, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (уравнение связи). Решим задачу, применив метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$\varPhi = (3x + 4y + 12z - 288) + \lambda\left(\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1\right).$$

Найдем ее критические точки: $\begin{cases} \varPhi'_x = 3 + \lambda x/48 = 0, \\ \varPhi'_y = 4 + 2\lambda y = 0, \\ \varPhi'_z = 12 + 2\lambda z = 0, \\ x^2/96 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3\cdot 48/\lambda, \\ y = -2/\lambda, \\ z = -6/\lambda, \\ x^2/96 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Подставим полученные x, y, z в последнее уравнение системы

$$\frac{3^2 \cdot 48^2}{48 \cdot 2\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} + \frac{36}{\lambda^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda^2}(9 \cdot 24 + 4 + 36) = 1, \quad \lambda^2 = 256, \quad \lambda = \pm 16.$$

Для $\lambda_1 = 16$ получим критическую точку $M_1\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$.

Для $\lambda_2 = -16$ получим критическую точку $M_2\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

По формуле **(**4.2**)** вычислим расстояние от точек M_1 и M_2 до заданной плоскости:

$$d_1 = \frac{\left| 3 \cdot (-9) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 12 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 288 \right|}{13} = 24\frac{8}{13}, \qquad d_2 = \frac{\left| 3 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{1}{8} + 12 \cdot \frac{3}{8} - 288 \right|}{13} = 19\frac{9}{13}.$$

Таким образом, точка M_1 наиболее удалена от плоскости, точка M_2 наименее удалена от плоскости.

Пример 4.7. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих диагональ длиной l, найти тот, объем которого наибольший.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту параллелепипеда через x, y, z. Тогда его объем $V = xyz$, а квадрат диагонали $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Требуется найти максимум функции $V = xyz$ при условии, что переменные x, y, z связаны уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ (уравнение связи).

Составим функцию Лагранжа $\Phi = xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - l^2\right)$.

Найдем ее критические точки из системы уравнений

$$\Phi'_x = yz + 2\lambda x = 0, \quad \Phi'_y = xz + 2\lambda y = 0, \quad \Phi'_z = xy + 2\lambda z = 0$$

и уравнения связи $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Умножая 1-е уравнение на x, 2-е уравнение на y, 3-е уравнение – на z, получим $xyz = -2\lambda x^2$, $xyz = -2\lambda y^2$, $xyz = -2\lambda z^2$. Отсюда либо $\lambda = 0$ (но тогда не будет учтено уравнение связи), либо $x^2 = y^2 = z^2$ и из уравнения связи $3x^2 = l^2$, $x = l/\sqrt{3}$.

Итак, мы получили единственную критическую точку $x = y = z = l/\sqrt{3}$. При этих значениях x, y, z объем V будет наибольшим $\left(V_{\max} = l^3/3\sqrt{3}\right)$, так как наименьший объем (при наличии уравнения связи) будет в том случае, когда одна из сторон стремится к нулю.

Примеры для самостоятельного решения

1. Представить положительное число a в виде произведения трех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.
Ответ: $a = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.
2. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.
Ответ: куб со сторонами $\sqrt[3]{V}$.

5. Скалярное поле

Скалярное поле – это область пространства, в которой задана скалярная функция $f(x,y,z)$, называемая функцией поля. Например, это может быть поле температур, поле давлений и т.д.

Множество точек поля, в которых функция поля $f(x,y,z)$ принимает постоянное значение c, образуют поверхность с уравнением $f(x,y,z)=c$, называемую ***поверхностью уровня*** поля. Если скалярное поле плоское, например, находится в плоскости XOY, то его функция поля $f(x,y)$ зависит от двух переменных x и y, а множество точек, в которых $f(x,y)=c$, образуют ***линию уровня***. Линии уровня используются при составлении географических карт (для изображения точек, расположенных на одинаковой высоте над уровнем моря), при составлении метеорологических карт (для изображения линий одинаковых температур – изотерм и линий одинакового давления – изобар).

5.1. Производная поля по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $f(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной поля по направлению. Пусть задана точка M и вектор $\vec{l}$, выходящий из точки M (рис.5). Рассмотрим точку M_1, лежащую на векторе $\vec{l}$, и величину $f(M_1)-f(M)=\Delta f(M)$ – приращение функции поля $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$.

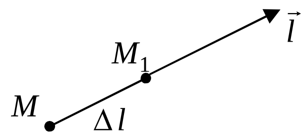

Рис.5

Определение. Производной поля $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ называют величину

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}(M)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}=\lim_{M_1\to M}\frac{f(M_1)-f(M)}{|M_1M|}}.$$

Свойства производной по направлению

1). $\frac{\partial f}{\partial l}(M)$ есть скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$.

Действительно, $\Delta f(M)$ есть изменение функции $f(M)$ на участке MM_1,

$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть средняя скорость изменения функции $f(M)$ на участке MM_1,

$\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$.

2). Поле $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ возрастает (соответственно убывает) тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M)\ge 0$ (соответственно $\frac{\partial f}{\partial l}(M)\le 0$).

Действительно, в направлении $\vec{l}$ поле $f(M)$ возрастает $\Leftrightarrow$ $f(M_1)>f(M)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(M_1)-f(M)}{|M M_1|}>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial f}{\partial l}(M)\ge 0.$$

Формула для вычисления производной по направлению

Пусть функция $f(M)=f(x,y,z)$ – дифференцируема в точке $M(x,y,z)$. Тогда

$$\Delta f(M) = f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y + f'_z(M)\Delta z + o(\rho), \qquad (5.1)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \Delta l$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho} = \lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{o(\Delta l)}{\Delta l} = 0$.

Поделим равенство (5.1) на Δl:

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = f'_x(M)\frac{\Delta x}{\Delta l} + f'_y(M)\frac{\Delta y}{\Delta l} + f'_z(M)\frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}. \qquad (5.2)$$

Рассмотрим вектор $\operatorname{grad} f(M) = \left\{ f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M) \right\}$, называемый ***градиентом поля*** $f(M)$**,** и вектор $\vec{l_0} = \left\{ \dfrac{\Delta x}{\Delta l}, \dfrac{\Delta y}{\Delta l}, \dfrac{\Delta z}{\Delta l} \right\}$, равный единичному вектору направления $\vec{l}$.

Тогда равенство (5.2) можно записать в виде

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \operatorname{grad} f(M)\cdot \vec{l}_0 + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}.$$

В пределе при Δl стремящемся к нулю получим:

$$\boxed{\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(M)\cdot \vec{l_0}}, \qquad (5.3)$$

где $\operatorname{grad} f(M) = \left\{ f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M) \right\}$, $\vec{l_0} = \dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ — единичный вектор направления $\vec{l}$.

5.2. Градиент и его свойства

Градиент $\operatorname{grad} f(M) = \left\{ f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M) \right\}$ является важной характеристикой скалярного поля. Отметим ряд свойств градиента.

1. Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего возрастает в направлении вектора $\operatorname{grad} f(M_0)$ со скоростью, равной $|\operatorname{grad} f(M_0)|$.
2. Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего убывает в направлении, противоположном вектору $\operatorname{grad} f(M_0)$, со скоростью, равной $|\operatorname{grad} f(M_0)|$.
3. Вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0.

Действительно из формулы (5.3**)** и определения скалярного произведения следует, что

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(M_0)\cdot \vec{l_0} = |\operatorname{grad} f(M_0)|\cdot|\vec{l_0}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\vec{l}$. Так как длина единичного вектора $\vec{l_0}$ равна единице, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = |\operatorname{grad} f(M_0)|\cdot\cos\varphi.$$

Поэтому $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $|\operatorname{grad} f(M_0)|$, когда $\cos\varphi = 1$. Значит, угол φ между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\vec{l}$ равен нулю и $\operatorname{grad} f(M_0) \uparrow\uparrow \vec{l}$.

Производная $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ будет принимать минимальное значение, когда $\cos\varphi = -1$, т.е. угол $\varphi = \pi$ и $\operatorname{grad} f(M_0) \uparrow\downarrow \vec{l}$.

Поверхность уровня поля $f(x, y, z)$ имеет уравнение $f(x, y, z) = c$. Нормальный вектор этой поверхности $\overline{N} = \left\{F'_x; F'_y; F'_z\right\}_{M_0}$ совпадает с $\operatorname{grad} f(M_0)$. Значит, вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проведенной в точку M_0.

Пример 5.1. Для поля $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ найти

а) производную поля f в точке M_0 в направлении вектора M_0M, где $M_0(1,0,1)$, $M(3,1,2)$,

б) наибольшую скорость возрастания поля $f(M)$ в точке M_0.

Решение. а). Найдем вектор $\overrightarrow{M_0M}$ =\{2,1,1\}, единичный вектор направления

$$\vec{l_0} = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{\{2,1,1\}}{\sqrt{6}}, \quad \operatorname{grad} f(M_0) = \left\{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\right\} = \{2x, 2y, 2z\}_{M=M_0} = \{2, 0, 2\}$$

Теперь воспользуемся формулой (5.3):

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(M) \cdot \vec{l_0} = \{2, 0, 2\} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\{2,1,1\} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1) = \sqrt{6}.$$

Так как $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l} > 0$, то поле в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$ возрастает, причем со скоростью, равной $\sqrt{6}$.

б). Наибольшая скорость возрастания поля $f(M)$ в точке M_0 равна

$$\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right| = \sqrt{2^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Для поля $f(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y - z^3$ найти

   а) максимальную скорость возрастания поля в точке $M_0(0,0,0)$,

   б) направление наиболее быстрого убывания поля в точке M_0,

   в) скорость изменения поля в точке M_0 в направлении, идущем от точки M_0 к точке $M(3,4,0)$.

Ответ: а) $\sqrt{13}$, б) $\vec{l} = \{3, -2, 0\}$, в) $-\frac{1}{5}$.

2. Найти производную поля $f(M) = xy^2 + z^2 - xyz$ в точке $M(1,1,2)$ в направлении, образующем с осями координат углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Указание. Единичный вектор направления имеет координаты $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Ответ: 5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.1. 288 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Ч.1. 352 с.
5. Высшая математика /под редакцией Яковлева Г.Н. М.: Высшая школа, 2004. 584 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа /под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука, 1996. 464 с.
7. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов /И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев . М.: Наука, 1980. 946 с.
8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк.,1997. Ч.1. 304 с.

Оглавление

Учебно-методическое издание

Функции нескольких переменных

Составитель Минькова Ревекка Максовна

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подисано в печать 12.10.2005			Формат 60×84 1/16
Бумага типографская	Офсетная печать		Усл. печ.л. 1,51
Уч.-изд. л. 1,5	Тираж	Заказ	Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 17