Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»
Институт образовательных информационных технологий

Р.М. Минькова

Линейная алгебра с приложениями

Учебно-методическое пособие

Научный редактор доц. В.Б. Грахов

Печатается по решению редакционно-издательского
совета ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

Екатеринбург
2006

УДК 517.5: 517.28 (075.8)
ББК 22.161.я73
М 62

Рецензенты:
кафедра высшей математики Уральского государственного экономического университета (зав. кафедрой проф., канд. физ.-мат. наук Н.И. Чвялева);

проф., д-р физ.-мат. наук И. В. Мельникова (Уральский государственный университет им. А.М, Горького, кафедра математического анализа)

Автор Р.М. Минькова

М 62 Линейная алгебра с приложениями: учебно-методическое пособие по курсу «Высшая математика» / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ−УПИ, 2006. 49 с.

ISBN-5-321-00547-8

В пособии рассмотрены элементы линейной алгебры: матрицы и системы линейных уравнений, линейные и евклидовы пространства, линейные операторы. Рассмотрены приложения этих понятий к приведению квадратичных форм, кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду, к решению линейных систем дифференциальных уравнений, к исследованию этих решений на устойчивость. Приведено решение типовых задач. Предложены примеры для самостоятельного решения с ответами.

Пособие предназначено для студентов дистанционной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 8 назв. Рис.5.

УДК 517.5: 517.28 (075.8)
ББК 22.161.я73

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» и факультетом дистанционного образования.

ISBN-5-321-00547-8

Оглавление

1. Матрицы и определители

Матрицы и определители являются удобным математическим аппаратом, широко используемым в различных областях математики, физики, естествознания, техники.

1.1. Понятие матрицы

Матрицей размеров mxn называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. В общем виде ее записывают так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{i\,j})_{mxn}.$$

Первый индекс у элемента матрицы указывает номер строки, второй индекс – номер столбца, в котором расположен данный элемент. Строку или столбец матрицы будем называть ее рядом. Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33},\dots,a_{mm}$ образуют главную диагональ.

Матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов $(m=n)$, называется ***квадратной*** матрицей порядка n.

Квадратная матрица, у которой элементы на главной диагонали равны единице, а остальные элементы – нули, называется ***единичной*** матрицей

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A=(a_{11}, a_{12},\dots,a_{1n})$, состоящая из одной строки, называется ***матрицей-строкой.*** Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***матрицей-столбцом.***

Две матрицы называются равными, если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой.

1.2. Понятие определителя квадратной матрицы

Понятие определителя вводится только для ***квадратных*** матриц. Понятие определителя $n-$го порядка при $n=2$, $n=3$ было введено в векторной алгебре.

Понятие определителя $n-$го порядка ($n>3$) связано с понятием минора и алгебраического дополнения элемента матрицы A. Для элемента a_{ij} матрицы A рассмотрим:

1) ***минор*** M_{ij} – определитель матрицы, полученной из данной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца,
2) ***алгебраическое дополнение*** $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Например, для матрицы 2-го порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеем:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -a_{12}, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.$$

Для матрицы 3-го порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Определитель $n-$го порядка вводится по индукции аналогичным образом через определители $(n-1)-$го порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n} = \\ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Пример 1.1. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\right) - 3 \cdot \left(0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 0\right) = 2\big((-28+3) + 2(-15+21)\big) - 3(-6+7) = -29.$$

1.3. Свойства определителя

1. ***Теорема разложения***: определитель равен сумме произведений элементов любого своего ряда на их алгебраические дополнения.
2. ***Теорема аннулирования***: сумма произведений элементов ряда на алгебраические дополнения элементов другого ряда равна нулю.
3. Определитель с двумя пропорциональными рядами равен нулю.

4. Общий множитель элементов ряда можно вынести за знак определителя.
5. Определитель не изменится, если к некоторому его ряду добавить параллельный ему ряд, умноженный на число λ.

Вывод перечисленных свойств можно опустить. Для определителей 2-го порядка их легко проверить непосредственным вычислением. Для определителей высших порядков вывод проводится методом математической индукции.

Часто определители удобно вычислять, используя их свойства. Например, определитель проще разлагать по элементам ряда, содержащего нули; следить, нет ли пропорциональных рядов; выносить общий множитель ряда и т.д.

Пример 1.2. Определитель, содержащий ниже главной диагонали нули, удобнее разлагать по элементам первого столбца:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ 0 & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots a_{nn} \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{21} + \dots + 0 \cdot A_{n1}.$$

Продолжая разлагать снова по элементам 1-го столбца, получим:

$$|A_n| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \dots a_{3n} \\ 0 & a_{44} \dots a_{4n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице.

Пример 1.3. Следующий определитель разложим по элементам 4-й строки, содержащей нули, и воспользуемся тем, что в получившемся определителе будут пропорциональны первая и третья строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 0.$$

Пример 1.4. В следующем определителе к 4-й строке прибавим 3-ю строку, умноженную на $\lambda = -1$(т.е. вычтем из 4-й строки 3-ю строку). Получим определитель с двумя пропорциональными строками (четвертой и второй):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить определители

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2)\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}, \qquad 3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Указание. В 1-м примере определитель разложить по элементам последнего столбца. Во 2-м примере, вычитая 1-ю строку из 2-й и 3-й строк и разложив получившийся определитель по элементам последнего столбца, получим определитель с пропорциональными строками. В 3-м примере вычесть 1-й столбец из 2-го и 3-го столбцов, разложить получившийся определитель по элементам 1-й строки и вынести общие множители $(y-x)$ и $(z-x)$ из 2-го и 3-го столбцов соответственно.

Ответы: 1) 2; 2) 0; 3) $(y-x)(z-x)(z-y)$.

1.4. Действия с матрицами

1. Операция ***транспонирования*** матрицы состоит в замене ее строк столбцами.

   Например, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то транспонированная матрица $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Операция ***сложения*** матриц определена для матриц одного порядка и состоит в сложении элементов матриц, стоящих на одинаковых местах.
3. Операция ***умножения*** матрицы ***на число*** состоит в умножении каждого элемента матрицы на это число.

   Например, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $C=2A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

4. Операция ***умножения*** двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{k\times p}$ определена только в том случае, если внутренние размеры этих матриц n и k совпадают, т.е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Сначала определим умножение матрицы-строки $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}$ следующим образом: $AB=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$. Тогда произведением матрицы A размером $m\times n$ со строками $A_1,A_2,...,A_m$ на матрицу B размером nxp со столбцами $B_1,B_2,...,B_p$ называется матрица C размером $m\times p$, элементы которой получаются следующим образом: каждая строка A_i матрицы A последовательно умножается на каждый столбец B_j матрицы B и записывается в i-ю строку и j-й столбец матрицы, т.е.:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \; \dots \; A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 \dots A_2B_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ A_mB_1 & A_mB_2 \dots A_mB_p \end{pmatrix}.$$

Пример 1.5. Умножить матрицу $A=(2\ \ 0\ \ 1)$ на матрицу $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Матрица A имеет размеры 1×3, а матрица B имеет размеры 3×2. Внутренние размеры этих матриц совпадают, поэтому произведение $A\cdot B$ существует и является матрицей размером 1×2. Чтобы ее получить, обозначим строку матрицы A через A_1, а столбцы матрицы B через B_1, B_2. Тогда

$$A_1\cdot B_1=(2\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3=5,$$

$$A_1\cdot B_2=(2\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=2\cdot 5+0\cdot 3+1\cdot 1=11,$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\end{pmatrix}.$$

Отметим, что перемножить матрицы в обратном порядке, т.е. матрицу $B_{3\times 2}$ на матрицу $A_{1\times 3}$ нельзя, т.к. их внутренние размеры 2 и 1 не равны.

Пример 1.6. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

Матрица A имеет размеры 3×2, матрица B имеет размеры 2×1. Внутренние размеры этих матриц совпадают, поэтому произведение $A\cdot B$ существует и является матрицей размером 3×1. Обозначим строки матрицы A через A_1, A_2, A_3, а столбец матрицы B через B_1. Тогда

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}A_1B_1\\A_2B_1\\A_3B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 3\\-3\cdot 5+4\cdot 3\\0\cdot 5+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

Не доказывая, перечислим некоторые свойства произведения матриц:

$$A\cdot(B+C)=AB+AC, \qquad A\cdot(BC)=(AB)\cdot C,$$

$$A(\lambda\cdot B)=\lambda\cdot(AB), \qquad (AB)^T=B^T\cdot A^T.$$

Для квадратных матриц одного порядка дополнительно имеем:

$$A\cdot E=E\cdot A=A, \qquad \det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}22 & -9 & 35\\ 15 & -10 & 20\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

2. Проверить, что $A\cdot B=B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

1.5. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A, если

$$\boxed{A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E.}$$

Всякая ли квадратная матрица имеет обратную? Как вычислить обратную матрицу? Ответы на эти вопросы дают теоремы 1.1 и 1.2.

Теорема 1.1. Пусть определитель матрицы A равен нулю. Тогда матрица A не имеет обратной.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $E=A\cdot A^{-1}$ и $\det E=\det\left(A\cdot A^{-1}\right)=\det A\cdot\det A^{-1}$. Так как $\det E=1$, то $\det A\cdot\det A^{-1}=1$, т.е. получили противоречие с тем, что $\det A=0$.

Теорема 1.2. Пусть определитель матрицы A отличен от нуля. Тогда обратная матрица A^{-1} существует и вычисляется по формуле

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\ \dots\ A_{1n}\\ A_{21} & A_{22}\ \dots\ A_{2n}\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ A_{n1} & A_{n2}\ \dots\ A_{nn}\end{pmatrix}^{T},}$$

где $A_{11},\dots,A_{nn}$ — алгебраические дополнения элементов $a_{11},\dots,a_{nn}$ матрицы A.

Доказательство. Обозначим через B матрицу из алгебраических дополнений и найдем произведение матрицы A и матрицы, транспонированной к B:

$$A\cdot B^{T}=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}\ A_{21}\dots A_{n1}\\ A_{12}\ A_{22}\dots A_{n2}\\ \dots\dots\dots\dots\\ A_{1n}\ A_{2n}\dots A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Перемножая i-ю строку матрицы A на k-й столбец матрицы B^{T}, получим сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на алгебраические дополнения k-й строки этой же матрицы. Эта сумма при $i=k$ равна $\det A$ (по теореме разложения), а при $i\neq k$ равна нулю (по теореме аннулирования). Поэтому

$$A\cdot B^{T}=\begin{pmatrix}\det A & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & \dots & 0\\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=\det A\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\dots 0\\ 0 & 1\dots 0\\ \dots & \dots\\ 0 & 0\dots 1\end{pmatrix}=\left(\det A\right)\cdot E.$$

Так как $\det A \neq 0$, то $A \cdot \dfrac{B^T}{\det A} = E.$ Аналогично, $\dfrac{B^T}{\det A} \cdot A = E$ и, следовательно, матрица $\dfrac{1}{\det A} \cdot B^T$ является обратной к матрице A.

Пример 1.7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ выяснить, существует ли обратная матрица A^{-1}, и если существует, то найти ее.

Решение. Вычислим определитель матрицы A: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 9 \cdot 2 = 3.$

Так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Для ее отыскания найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 9 = -9, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$

Тогда $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -3 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$

Для проверки ответа убедитесь, что $A \cdot A^{-1} = E.$

Перечислим основные ***свойства обратной матрицы***:

$$\boxed{1)\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \qquad 2)\ (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \qquad 3)\ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.}$$

Докажем первое свойство. Обозначим матрицу A^{-1} через C. Тогда

$$C \cdot A = A^{-1}A = E, \quad AC = A \cdot A^{-1} = E$$

и, следовательно, матрица A является обратной к C, т.е. $A = C^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$.

Докажем второе свойство. Обозначим $B^{-1} \cdot A^{-1} = C$. Тогда

$$C \cdot (AB) = \left(B^{-1}A^{-1}\right) \cdot (AB) = B^{-1} \cdot \left(A^{-1}A\right) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E.$$

Аналогично $(A \cdot B) \cdot C = E$, т.е. матрица $C = B^{-1} \cdot A^{-1}$ является обратной к матрице AB;

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}.$$

Докажем третье свойство. Так как $A \cdot A^{-1} = E$, то $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det E$ и, следовательно, $\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$

С помощью обратной матрицы можно решать матричные уравнения вида $A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$, где A — квадратная матрица, причем $\det A \neq 0$ (такая матрица называется невырожденной). По теореме 1.2 матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Для отыскания матрицы X равенство $A \cdot X = B$ умножим слева на матрицу A^{-1}. Тогда $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то получим, что $X = A^{-1} \cdot B$.

Для решения уравнения $X \cdot A = B$ надо также его умножить на матрицу A^{-1}, но только справа. Тогда $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ и $X = B \cdot A^{-1}$.

Пример 1.8. Решить, если возможно, матричное уравнение $A\cdot X=B,$ где

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала проверим, имеет ли матрица A обратную матрицу. Для этого вычислим определитель матрицы A, разлагая его по элементам третьей строки:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0\cdot A_{31}+0\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

Так как $\det A\neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Поэтому равенство $A\cdot X=B$ умножим слева на A^{-1}: $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ и $X=A^{-1}\cdot B.$ Для отыскания матрицы A^{-1} найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\;\; A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0.$$

Аналогично вычислим остальные алгебраические дополнения. Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\;\; B=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix},\;\; C=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ответы: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\;\; B^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix},\;\; C^{-1}=\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix},\;\; D=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

2. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$, 2) $X\cdot\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}.$

Ответы: 1). $X=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, 2). $X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.$

2. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{2.1}$$

Введем следующие матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ ... \ a_{2n} \\ .... \\ a_{k1} \ a_{k2} \ ... \ a_{kn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_k \end{pmatrix}.$

При умножении матрицы A на матрицу-столбец X получим матрицу-столбец, элементами которого являются левые части уравнений системы. Следовательно, систему (2.1) можно записать в ***матричной форме***:

$$A \cdot X = B,$$

где матрица A состоит из коэффициентов при неизвестных и называется матрицей системы, X — столбец из неизвестных, B — столбец свободных членов системы.

Система линейных уравнений может не иметь решений, тогда она называется несовместной; может иметь единственное решение, тогда она называется определенной; может иметь множество решений, тогда она называется неопределенной.

Рассмотрим различные способы решения систем.

2.1. Решение систем с квадратной невырожденной матрицей

Пусть матрица системы A — квадратная, т.е. число строк k равно числу столбцов n. Тогда в системе (2.1) число уравнений равно числу неизвестных. Кроме того, пусть матрица A невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$. Отметим два способа решения систем с такой матрицей.

Решение системы средствами матричного исчисления

Запишем систему (2.1) в матричной форме $A \cdot X = B$ и решим это матричное уравнение. Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножив равенство $A \cdot X = B$ слева на A^{-1}, получим: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ или

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Решение системы по формулам Крамера

Вектор-решение X запишем в форме $X = A^{-1} \cdot B$ и воспользуемся формулой для отыскания обратной матрицы A^{-1}. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \ ... \ A_{n1} \\ .... \\ A_{1n} \ ... \ A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы в правой части равенства и сравнив результат с матрицей в левой части, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\det A}(A_{11}b_1 + ... + A_{n1}b_n), \\ .... \\ x_n = \dfrac{1}{\det A}(A_{1n}b_1 + ... + A_{nn}b_n). \end{cases} \tag{2.2}$$

Обозначим через Δ определитель матрицы A, через Δ_i — определитель, полученный из Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов $(i = 1,2,...n)$. Тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 \ a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ .... \\ b_n \ a_{n2} \ ... \ a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим Δ_1 по элементам первого столбца, учитывая, что алгебраические дополнения элементов первых столбцов определителей Δ_1 и Δ совпадают:

$$\Delta_1 = b_1 A_{11} + ... + b_n A_{n1}.$$

Поэтому из формул (2.2) следует, что $x_1 = \dfrac{1}{\det A} \cdot \Delta_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Итак, система (2.1) с квадратной невырожденной матрицей A имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.}$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i есть определители, полученные из Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов $(i = 1,2,...,n)$.

Пример 2.1. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Решение. Система содержит три линейных уравнения с тремя неизвестными. Вычислим определитель матрицы системы, разложив его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2-3) - 1 \cdot (6-3) = -5.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое найдем по формулам Крамера. Для этого составим и вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$ Можно проверить, что найденные значения x_1, x_2, x_3 обращают каждое уравнение системы в тождество.

Примеры для самостоятельного решения

Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

1) $\begin{cases} x+y-2z=6, \\ 2x+3y-7z=16, \\ 5x+2y+z=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

Указание. При решении 2-й системы учесть, что в определителях $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ два столбца пропорциональны и поэтому эти определители равны нулю.

Ответы: 1) $x=3,\ y=1,\ z=-1$; 2) $x_1=2,\ x_2=x_3=x_4=0.$

2.2. Решение произвольной системы методом Гаусса

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений $A \cdot X = B$ и ее расширенную матрицу $(A \mid B)$, т.е. матрицу, составленную из матрицы системы A и столбца свободных членов B:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (A \mid B) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \ldots a_{1n} & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{k1} \ldots a_{kn} & b_k \end{array} \right).$$

Если уравнение системы умножить на число, сложить с другим уравнением, вычеркнуть одно из пропорциональных уравнений, поменять местами уравнения или неизвестные, то мы получим систему, равносильную исходной. Аналогичные операции удобнее проделывать не с самими уравнениями, а с их коэффициентами, т.е. элементами расширенной матрицы.

Метод Гаусса состоит в приведении расширенной матрицы системы к матрице с нулями ниже главной диагонали (прямой ход), с нулями выше главной диагонали (обратный ход) и с единицами на главной диагонали ***путем элементарных преобразований***:

1) умножения строки на число, отличное от нуля,
2) прибавления к строке другой строки,
3) вычеркивания одной из пропорциональных строк,
4) перестановки строк или столбцов местами.

Матрицы, полученные в результате таких преобразований, будем называть эквивалентными и соединять знаком эквивалентности ~ . Чтобы следить за ходом элементарных преобразований, строки матрицы будем обозначать буквами с индексами.

Опишем подробнее прямой и обратный ход метода Гаусса.

Прямой ход. С помощью элементарных преобразований строк получим ***нули ниже главной диагонали*** сначала в *первом столбце* с помощью первой строки (это равносильно исключению x_1 из всех уравнений, кроме первого); затем получим нули ниже главной диагонали *во втором столбце* с помощью второй строки и т.д.

Обратный ход. Получим ***нули выше главной диагонали*** сначала *в последнем столбце* с помощью последней строки, потом в *предпоследнем столбце* с помощью предпоследней строки и т.д..

Рассмотрим различные ситуации, которые могут возникнуть при применении метода Гаусса.

Если в процессе элементарных преобразований мы получим строку из нулей, а свободный член $b \neq 0$, то соответствующее уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$ не имеет решение. Система несовместна.

Если в процессе элементарных преобразований мы получим строку расширенной матрицы, всю состоящую из нулей, то эту строку вычеркнем (соответствующее уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ выполняется тождественно) и продолжим метод элементарных преобразований.

Если получим ненулевую строку, но на главной диагонали будет нулевой элемент, то поменяем столбцы в матрице (а значит, неизвестные в уравнениях) местами так, чтобы на главной диагонали оказался ненулевой элемент.

Пример 2.2. Решить систему $\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39, \\ x + 14z = -18. \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и обозначим ее строки A_1, A_2, A_3, A_4. Путем элементарных преобразований строк ***получим нули ниже главной диагонали*** сначала ***в первом столбце с помощью первой строки***:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 0 \\ 3 & 14 & 12 & 18 \\ 5 & 25 & 16 & 39 \\ 1 & 0 & 14 & -18 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 \\ 2A_2 - 3A_1 \\ 2A_3 - 5A_1 \\ 2A_4 - A_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & -15 & 36 \\ 0 & 15 & -33 & 78 \\ 0 & -7 & 15 & -36 \end{array}\right).$$

Вторая и четвертая строки пропорциональны (отличаются знаком). Поэтому вычеркнем одну из них, например, четвертую строку. Затем получим нули ниже главной диагонали ***во втором столбце с помощью второй строки*** :

$$(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & -15 & 36 \\ 0 & 15 & -33 & 78 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 7B_3 - 15B_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & -15 & 36 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & -15 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Закончен прямой ход метода Гаусса, т.е. ниже главной диагонали получены нули, элементы главной диагонали отличны от нуля. Перейдем к обратному ходу метода Гаусса: ***получим нули выше главной диагонали*** сначала ***в третьем столбце с помощью третьей строки,*** потом ***во втором столбце с помощью второй строки:***

$$(A\,|\,B)\sim\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}C_1-13C_3\\C_2+15C_3\\C_3\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&7&0&13\\0&7&0&21\\0&0&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&7&0&13\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\D_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}D_1-7D_2\\D_2\\D_3\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-8\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-4\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса закончен – ниже и выше главной диагонали получены нули. В результате преобразований системы (ее расширенной матрицы) мы получили равносильную систему с простейшей матрицей:

$$\begin{cases}1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=-4,\\0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=3,\\0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=-1,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x=-4,\\y=3,\\z=-1.\end{cases}$$

Таким образом, в результате элементарных преобразований на месте матрицы A мы получили единичную матрицу, а на месте столбца свободных членов получили столбец-решение.

Пример 2.3. Решить систему $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-1,\\x_1-3x_2-2x_3=3,\\2x_1-x_2+x_3=-2.\end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований строк получим нули ниже главной диагонали сначала с помощью 1-й строки в 1-м столбце, затем с помощью 2-й строки во 2-м столбце:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\1&-3&-2&3\\2&-1&1&-2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1\\A_2-A_1\\A_3-2A_1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&-5&-5&4\\0&-5&-5&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3-B_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\0&-5&-5&4\\0&0&0&0\end{array}\right).\qquad(2.4)$$

Третьей строке соответствует уравнение $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_4=-4$. Это равенство невозможно ни при каких значениях x_1, x_2, x_3. Следовательно, система не имеет решений.

Пример 2.4. Решить систему $\begin{cases}3x_1-x_2+3x_3+14x_4=1,\\6x_1-2x_2+3x_3+x_4=-4,\\9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=-5.\end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и получим нули ниже главной диагонали сначала с помощью 1-й строки в 1-м столбце:

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c}3&-1&3&14&1\\6&-2&3&1&-4\\9&-3&5&6&-5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1\\A_2-2A_1\\A_3-3A_1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc|c}3&-1&3&14&1\\0&0&-3&-27&-6\\0&0&-4&36&-8\end{array}\right).$$

Поделим 2-ю строку на (-3), 3-ю строку на (-4); получим две равные строки и одну из них вычеркнем:

$$(A\,|\,B)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&-1&3&14&1\\0&0&1&9&2\\0&0&1&9&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&-1&3&14&1\\0&0&1&9&2\end{array}\right).$$

Так как на главной диагонали получили нуль, то поменяем 2-й и 3-й столбцы местами (т.е. в системе меняем местами слагаемые с x_2 и x_3):

$$(A\,|\,B)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -1 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен: ниже главной диагонали – нули, элементы главной диагонали отличны от нуля. Перейдем к обратному ходу метода Гаусса: получим нули выше главной диагонали с помощью 2-й строки во 2-м столбце:

$$(A\,|\,B)\sim\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} B_1/3-B_2 \\ B_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -13/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса закончен: ниже и выше главной диагонали стоят нули, на главной диагонали – единицы. Этой расширенной матрице соответствует система, равносильная исходной системе; для ее записи вспомним, что меняли местами x_2 и x_3:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_3-\frac{1}{3}x_2-\frac{13}{3}x_4=-\frac{5}{3}, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_3+0\cdot x_2+9\cdot x_4=2. \end{cases}$$

Мы получили 2 уравнения с 4 неизвестными. Зафиксируем 2 неизвестных x_2 и x_4 (их называют свободными неизвестными), положив $x_2=u$, $x_4=v$, и выразим через них неизвестные x_1 и x_3 (их называют базисными неизвестными):

$$x_1=\frac{1}{3}u+\frac{13}{3}v-\frac{5}{3},\;\; x_2=u,\;\; x_3=-9v+2,\;\; x_4=v.$$

Придавая u и v различные значения, получим множество решений. Например, при $u=1,\ v=0$ получим одно из решений $x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=0$. При $u=0,\ v=1$ получим другое решение системы $x_1=\frac{8}{3},\ x_2=0,\ x_3=-7,\ x_4=1$ и т.д.

В заключение введем понятие ранга матрицы. Пусть элементарными преобразованиями матрица приведена к матрице размера $r\times n$ с нулями ниже главной диагонали и элементами, отличными от нуля на главной диагонали. Число строк r полученной матрицы назовем рангом исходной матрицы.

Можно показать, что система имеет решение только в том случае, если ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы. При этом, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение; если же ранг r матрицы системы меньше числа неизвестных n, то система имеет множество решений, причем число базисных неизвестных равно r, число свободных неизвестных $n-r$. Так, в примере 2.2 из соотношения (2.3) следует, что ранг матрицы системы равен 3, т.е. равен числу неизвестных; система имеет единственное решение. В примере 2.4 из соотношения (2.5) следует, что ранг матрицы системы $r=2$, т.е. меньше числа неизвестных; система имеет множество решений. В примере 2.3 из соотношения (2.4) следует, что ранг матрицы системы (если вычеркнуть строку из нулей) равен 2, а ранг расширенной матрицы (если переставить третий и четвертый столбцы) равен 3; система не имеет решений.

Примеры для самостоятельного решения

Решить системы, указать ранг r матрицы системы

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_3 = 9. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

Указание. В примере 1 поменять местами 1-е и 2-е уравнение системы, чтобы в левом верхнем углу матрицы системы была единица.

Ответы: 1. Система имеет единственное решение $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1;$ ранг $r = 3$.

2. Ранг $r = 2$. Система имеет множество решений

$x_1 = u,\ x_2 = \frac{1}{22}(41 - 11u - 17v),\ x_3 = \frac{1}{11}(9v - 12),\ x_4 = v$ (для любых $u, v \in R$).

3. Система имеет множество решений

$x_1 = u,\ x_2 = 7(u-1),\ x_3 = 5(u-1),\ x_4 = 0,$ (для любого $u \in R$). Ранг $r = 3$.

2.3. Решение однородной системы

В однородной системе все свободные члены равны нулю, т.е. система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k\,1}x_1 + \ldots + a_{k\,n}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что такая система имеет нулевое решение $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0$. Кроме того, из предыдущей теории следует:

1). Если ранг r матрицы системы равен числу неизвестных n, то нулевое решение будет единственным.
2). Если $r < n$, то однородная система имеет множество решений (включая и нулевое решение).
3). Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных (т.е. матрица системы – квадратная), то
а) система имеет единственное, т.е. нулевое решение, если определитель системы Δ отличен от нуля
б) система имеет множество решений, если $\Delta = 0$.

При решении однородной системы методом Гаусса столбец свободных членов из нулей не пишут, т.к. в результате любых элементарных преобразований он останется нулевым столбцом.

Пример 2.5. Решить однородную систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Решение. Матрица A системы – такая же, как в примере 2.3. Применяя рассмотренные там элементарные преобразования к матрице A (нулевой столбец свободных членов не пишем), получим:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы A равен 2, что меньше числа неизвестных, т.е. система будет иметь множество решений. Для их отыскания закончим метод Гаусса, получив нули выше главной диагонали:

$$A\sim\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1-2A_2\\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Система с такой матрицей имеет вид:

$$\begin{cases}1\cdot x_1+0\cdot x_2+\ \ x_3=0,\\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3=0.\end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных x_1, x_2 образуют единичную матрицу, следовательно, x_1, x_2 — базисные неизвестные, x_3 — свободное неизвестное. Положив $x_3=u$, получим множество решений $x_1=-u$, $x_2=-u$, $x_3=u$. При $u=1$ имеем $x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1$; при $u=-2$ имеем $x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=-2$ и т.д.

Примеры для самостоятельного решения

Решить однородные системы уравнений. Указать ранг матрицы системы:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ 3x_1-x_2-x_3=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=0,\\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0,\\ 4x_1-5x_2+8x_3+x_4=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2-x_3-x_4=0,\\ 5x_1+x_2-x_4=0.\end{cases}$

Ответы: 1) $x_1=x_2=x_3=0$; $r=3$.

2) $x_1=-u/4,\quad x_2=u,\quad x_3=3u/4,\quad x_4=0\ \ (u\in R)$; $r=3$.

3) $x_1=-u/4,\quad x_2=5u/4+v,\quad x_3=u,\quad x_4=v\ \ (u, v\in R)$; $r=2$.

2.4. Отыскание обратной матрицы методом Гаусса

Рассмотрим квадратную матрицу A размером $n\times n$. Предположим, что $\det A\neq 0$, тогда матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Столбцы обратной матрицы A^{-1} обозначим $X_1, X_2,\ldots X_n$; столбцы единичной матрицы E обозначим $E_1, E_2,\ldots,E_n$, т.е. $A^{-1}=(X_1\ldots X_n)$, $E=(E_1\ldots E_n)$. Обратная матрица удовлетворяет соотношению $A\cdot A^{-1}=E$, т.е. $A\cdot(X_1\ldots X_n)=(E_1\ldots E_n)$. Отсюда получаем n систем линейных уравнений $A\cdot X_1=E_1, \ldots, A\cdot X_n=E_n$.

Для решения этих систем методом Гаусса нужно составить их расширенные матрицы $(A|E_1), \ldots, (A|E_n)$ и элементарными преобразованиями получить на месте матрицы A единичную матрицу. Тогда на месте столбцов свободных членов $E_1\ldots E_n$ получим соответственно $X_1\ldots X_n$. Так как все расширенные матрицы отличаются лишь последним столбцом, то удобно применять элементарные преобразования ко всем матрицам одновременно, записав их в виде $(A\,|\,E_1 \dots E_n)$. После элементарных преобразований получим $(E\,|\,X_1 \dots X_n)$. Учтем, что столбцы $E_1, \dots, E_n$ образуют единичную матрицу E, а столбцы $X_1 \dots X_n$ образуют обратную матрицу A^{-1}. Отсюда следует

> ***Метод отыскания обратной матрицы*** A^{-1}**:** составить расширенную матрицу $(A\,|\,E)$ и элементарными преобразованиями получить единичную матрицу E на месте A, тогда на месте E получим обратную матрицу A^{-1}:
>
> $$\left(A\,|\,E\right) \sim \dots \sim \left(E\;|\,A^{-1}\right).$$

Пример 2.6. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим расширенную матрицу $(A\,|\,E)$ и получим на месте A единичную матрицу E:

$$\left(A\,|\,E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 - A_2 - A_3 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(E\,|\,A^{-1}\right).$$

Справа от единичной матрицы мы получили обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Самостоятельно проверьте, что $A \cdot A^{-1} = E$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти матрицы, обратные матрицам: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = -\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 13 & 15 & -12 \\ 17 & 10 & -8 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Линейные пространства

Во многих разделах математики изучаются множества элементов, для которых определены операции сложения и умножения на число, например, множество векторов, множество матриц одной размерности, множество непрерывных на $[a,b]$ функций и т.д. В каждом множестве эти операции определяются по-своему, но имеют одни и те же свойства, которые позволяют изучать их с единой точки зрения.

3.1. Определение линейного пространства

Определение. Множество L называется линейным пространством, если для любых его элементов X, Y и для любого числа α определены сумма $X+Y$ и произведение αX, принадлежащие множеству L и удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $X+Y=Y+X$,
2) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$,
3) существует нулевой элемент θ, такой, что $X+\theta=X$,
4) существует противоположный элемент $-X$, такой, что $X+(-X)=\theta$,
5) $1\cdot X=X$,
6) $\alpha(\beta X)=(\alpha\beta)X$,
7) $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$,
8) $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$.

В этом определении X, Y, Z – произвольные элементы множества L, α, β – произвольные числа. Если эти числа действительные, то имеем действительное линейное пространство; если эти числа комплексные, то имеем комплексное линейное пространство.

Пример 3.1. Множество матриц размером $m\times n$ образуют линейное пространство. Действительно, операции сложения матриц и умножения матрицы на число удовлетворяют всем аксиомам, перечисленным в определении линейного пространства. Нулевой элемент этого пространства есть матрица с нулевыми элементами.

Пример 3.2. n-мерные векторы, т.е. матрицы-строки из n чисел, образуют линейное пространство как множество матриц размером $1\times n$. Нулевой элемент этого пространства есть вектор с нулевыми координатами.

Пример 3.3. Множество R_n^+ n- мерных векторов с положительными координатами не образуют линейное пространство, т.к. для вектора X из множества R_n^+ вектор αX при $\alpha<0$ имеет отрицательные координаты и, значит, не принадлежит множеству R_n^+.

Пример 3.4. Множество полиномов степени, не превосходящей n, образуют линейное пространство, т.к. сумма таких полиномов и произведение полинома на число снова являются полиномами степени, не превосходящей n, причем выполняются все аксиомы линейного пространства.

Пример 3.5. Множество полиномов степени n не является линейным пространством, т.к. сумма полиномов $P_n(x))=x^n-5$ и $Q_n(x)=-x^n+8$ степени n не является полиномом степени n.

Примеры для самостоятельного решения

1. Является ли линейным пространством

а) множество всех целых чисел? б) множество всех четных чисел?

Ответ: а). Нет, б). Нет.

2. Является ли линейным пространством множество всех геометрических векторов, коллинеарных фиксированной прямой? *Ответ:* Да.

3.2. Линейная зависимость элементов

Определение 1. Элементы $X_1, X_2, ..., X_n$ линейного пространства называются линейно зависимыми, если существуют числа $c_1, c_2, ..., c_n$ (не все равные нулю) такие, что

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n = \theta .$$

Определение 2. Элементы $X_1, X_2, ..., X_n$ линейного пространства называются линейно независимыми, если равенство

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n = \theta$$

выполняется только для $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Пример 3.6. Покажем, что n-мерные векторы $E_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., E_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ являются линейно независимыми. Для этого рассмотрим равенство: $c_1 E_1 + c_2 E_2 + ... + c_n E_n = \theta$. Вектор $c_1 E_1 + c_2 E_2 + ... + c_n E_n$ по правилам действия с векторами имеет координаты $(c_1, c_2, ..., c_n)$, а нулевой вектор θ имеет координаты $(0, 0, 0, ..., 0)$. Эти два вектора равны только в том случае, если $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, что и означает, что векторы $E_1, E_2, ..., E_n$ — линейно независимы.

Иногда для исследования линейной зависимости оказывается удобной следующая теорема.

Теорема 3.1. Элементы $X_1, X_2, ..., X_n$ линейного пространства являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией других.

Доказательство. Необходимость. Пусть элементы $X_1, X_2, ..., X_n$ − линейно зависимы. Тогда существуют числа $c_1, c_2, ..., c_n$ (не все равные нулю, например, $c_1 \neq 0$) такие, что $c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n = \theta$. Так как $c_1 \neq 0$, то из этого равенства можно выразить X_1 через $X_2, ..., X_n$:

$$X_1 = -\frac{c_2}{c_1} X_2 - ... - \frac{c_n}{c_1} X_n ,$$

т.е. X_1 является линейной комбинацией $X_2, ..., X_n$.

Достаточность. Пусть X_1 является линейной комбинацией $X_2, ..., X_n$, т.е. $X_1 = \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n$. Перенеся все векторы в одну часть, получим

$$(-1) \cdot X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n = \theta ,$$

что и означает линейную зависимость элементов $X_1, X_2, ..., X_n$, так как коэффициент при X_1 отличен от нуля.

Пример 3.7. Векторы $X_1 = (3, 6, 9, 12)$, $X_2 = (1, 2, 3, 4)$, $X_3 = (1, 1, 1, 1)$ являются линейно зависимыми, так как $X_1 = 3 X_2 + 0 \cdot X_3$, т.е. вектор X_1 является линейной комбинацией векторов X_2, X_3.

Пример 3.8. Выяснить, будут ли векторы $X_1=(2,-2,1,0)$, $X_2=(-1,4,-3,2)$, $X_3=(3,0,-1,-2)$, $X_4=(-1,10,-8,2)$ линейно зависимыми. Если да, то среди них выбрать линейно независимые векторы и выразить через них все остальные векторы.

Решение. Для исследования линейной зависимости или независимости векторов следует рассмотреть равенство

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+c_4X_4=\theta. \qquad (3.1)$$

Если оно возможно только при нулевых коэффициентах c_1,c_2,c_3,c_4 , то векторы X_1,X_2,X_3,X_4 являются линейно независимыми; в противном случае эти векторы – линейно зависимы. Подставим в равенство (3.1) координаты векторов X_1,X_2,X_3,X_4 (их удобнее записать в столбцы, а не в строчки):

$$c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}-1\\10\\-8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Если расписать это равенство по координатам, то получим 4 линейных однородных уравнения с 4 неизвестными c_1,c_2,c_3,c_4. Решая систему методом Гаусса, выпишем матрицу коэффициентов при неизвестных и путем элементарных преобразований получим нули ниже и выше главной диагонали:

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&-1\\-2&4&0&10\\1&-3&-1&-8\\0&2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1-A_3\\A_2+A_1\\2A_3+A_2\\\frac{1}{2}A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4&7\\0&3&3&9\\0&-2&-2&-6\\0&1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1+B_3\\\frac{1}{3}B_2\\\frac{1}{2}B_3+\frac{1}{3}B_2\\B_4+\frac{1}{2}B_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\D_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}D_1+D_4\\D_2+\frac{1}{2}D_3\\-\frac{1}{2}D_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

В полученной эквивалентной матрице первые три столбца при неизвестных c_1, c_2, c_3 образуют единичную матрицу; следовательно, неизвестные c_1, c_2, c_3 являются базисными и могут быть выражены через свободное неизвестное c_4. Для этого запишем систему уравнений, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases}c_1-c_4=0,\\c_2+2c_4=0,\\c_3+c_4=0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}c_1=c_4,\\c_2=-2c_4,\\c_3=-c_4.\end{cases} \qquad (3.3)$$

При $c_4\neq 0$ получили ненулевое решение c_1, c_2, c_3, c_4 системы (3.1). Это и означает, что векторы X_1, X_2, X_3, X_4 – линейно зависимы.

При $c_4=0$ равенство (3.1) примет вид: $c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=\theta$, а из равенств (3.3) следует, что $c_1=c_2=c_3=0$. Это означает, что векторы X_1, X_2, X_3 – линейно независимы.

При $c_4=1$ из равенств (3.3) получим $c_1=1,\ c_2=-2,\ c_3=-1$, а из равенства (3.1) выразим вектор X_4 через линейно независимые вектора X_1, X_2, X_3:

$$X_4 = -c_1 X_1 - c_2 X_2 - c_3 X_3 \quad \text{или} \quad X_4 = -X_1 + 2X_2 + X_3.$$

Заметим, что если бы было два базисных неизвестных (например, c_1 и c_2) и два свободных неизвестных (c_3 и c_4), то векторы X_1 и X_2 были бы линейно независимы, а для выражения X_3 и X_4 через X_1 и X_2 нужно было бы рассмотреть два случая: $c_3 = 1$, $c_4 = 0$ и $c_3 = 0$, $c_4 = 1$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Показать, что векторы $X_1 = (1, 2, 3)$, $X_2 = (2, 3, 4)$, $X_3 = (3, 4, 5)$ являются линейно зависимыми. Выбрать среди них линейно независимые векторы и выразить через них остальные векторы. *Ответ:* $X_3 = 2X_2 - X_1$.

2. Показать, что векторы $X_1 = (2, 1, 4, 5)$, $X_2 = (-1, 1, 1, -1)$, $X_3 = (1, 3, 7, 5)$, $X_4 = (3, 1, 5, 7)$ являются линейно зависимыми. Выбрать среди них линейно независимые векторы и выразить через них остальные векторы.

Ответ: $X_3 = \frac{4}{3}X_1 + \frac{5}{3}X_2, \quad X_4 = \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2.$

3.3. Базис. Координаты элемента в данном базисе

Определение. Пусть в линейном пространстве L существует n ***линейно независимых элементов*** $E_1, E_2, ..., E_n$, таких, что *каждый элемент* X из L *является их линейной комбинацией*, т.е. $X = a_1E_1 + a_2E_2 + ... + a_nE_n$. Тогда пространство L называют $n-$мерным, элементы $E_1, E_2, ..., E_n$ называют ***базисом*** пространства L, а числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называют ***координатами*** элемента X в базисе $E_1, E_2, ..., E_n$.

Пример 3.9. n-мерные векторы $E_1 = (1,0,0,...,0)$, $E_2 = (0,1,0,...,0)$, … , $E_n = (0,0,0,...,1)$ образуют базис в пространстве R_n n-мерных векторов, т.к. в п.3.2 было показано, что эти векторы линейно независимы; кроме того, любой n-мерный вектор $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ является линейной комбинацией этих векторов: $A = a_1E_1 + a_2E_2 + ... + a_nE_n$. В пространстве R_n базис $E_1, E_2, ..., E_n$ называется естественным базисом, т.к. координаты вектора в этом базисе $a_1, a_2, ..., a_n$ совпадают с тем набором n чисел, из которых состоит вектор.

Пример 3.10. Найти базис и размерность пространства многочленов степени, не превосходящей n.

Решение. Многочлены $1, x, x^2, ..., x^n$ степени, не превосходящей n, являются линейно независимыми, т.к. равенство $c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + ... + c_n \cdot x^n \equiv 0$ возможно только при $c_0 = c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Кроме того, любой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ является линейной комбинацией многочленов $1, x, x^2, ..., x^n$. Значит, эти многочлены образуют базис в пространстве многочленов степени, не превосходящей n. Так как базис состоит из $n+1$ многочлена, то $n+1$ есть размерность этого пространства.

Отметим две важные теоремы.

Теорема 3.2. Разложение элемента по базису единственно.

Доказательство. Пусть имеет место два разложения элемента X по базису:

$$X = a_1 E_1 + a_2 E_2 + ... + a_n E_n ,$$

$$X = b_1 E_1 + b_2 E_2 + ... + b_n E_n .$$

Вычитая эти равенства, получим $\theta = (a_1 - b_1) E_1 + (a_2 - b_2) E_2 + ... + (a_n - b_n) E_n$.

Так как элементы базиса $E_1, E_2, ..., E_n$ линейно независимы, то это равенство возможно только при $a_1 - b_1 = 0,\quad a_2 - b_2 = 0, ..., a_n - b_n = 0$. Значит, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $..., a_n = b_n$ и разложение по базису единственно.

Теорема 3.3. В n-мерном пространстве любые n линейно независимых элементов образуют базис.

Доказательство этой теоремы можно опустить. Из теоремы следует, что в n-мерном пространстве существуют различные базисы, но все они состоят из n элементов.

Пример 3.11. Пусть в пространстве R_3 векторы E_1, E_2, E_3 образуют базис. Показать, что векторы $E_1' = E_1$, $E_2' = E_1 + E_2$, $E_3' = E_1 + E_3$ также образуют базис пространства R_3 .

Решение. В силу теоремы 3.3 достаточно показать, что векторы E_1', E_2', E_3' – линейно независимы. Для этого рассмотрим равенство $c_1 E_1' + c_2 E_2' + c_3 E_3' = 0$.

Подставим вместо E_1', E_2', E_3' их выражения: $c_1 E_1 + c_2 \left(E_1 + E_2\right) + c_3 \left(E_1 + E_3\right) = 0$.

Перегруппировав, получим: $\left(c_1 + c_2 + c_3\right) E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 = 0$.

Так как векторы E_1, E_2, E_3 образуют базис, следовательно, линейно независимы, то $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Отсюда следует, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то есть векторы E_1', E_2', E_3' линейно независимы и, значит, в силу теоремы 3.3 образуют базис.

Примеры для самостоятельного решения

1. Показать, что многочлены $P_1(t) = t^2 + 1$, $P_2(t) = -t^2 + 2t$, $P_3(t) = t^2 - t$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше второй. Разложить многочлен $P(t) = 4t^2 - 3t + 2$ по этому базису. *Ответ:* $P(t) = 2 P_1(t) - P_2(t) + P_3(t)$.

2. В пространстве R_3 векторы E_1, E_2, E_3 образуют базис. Показать, что векторы $E_1' = 2E_1 - E_2 + 3E_3$, $E_2' = -3E_1 + E_2 - 2E_3$, $E_3' = 4E_2 + 5E_3$ образуют базис пространства R_3.

3.4. Замена базиса

Из аналитической геометрии известно, что решение многих задач облегчается, если выбрать удобный базис (удобную систему координат). Замена базиса эффективна также и при решении задач в n-мерном пространстве.

Пусть $E_1, E_2,..., E_n$ – старый базис, $E'_1, E'_2,..., E'_n$ – новый базис. Разложим каждый элемент нового базиса по старому базису

$$\begin{cases} E'_1 = p_{11} E_1 + ... + p_{n1} E_n, \\ E'_2 = p_{12} E_1 + ... + p_{n2} E_n, \\ .... \\ E'_n = p_{1n} E_1 + ... + p_{nn} E_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме:

$$\boxed{\left(E'_1 E'_2 ... E'_n\right) = \left(E_1 E_2 ... E_n\right) \cdot \begin{pmatrix} p_{11}\ p_{12} \cdots p_{1n} \\ .... \\ p_{n1}\ p_{n2} \cdots p_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad E' = E \cdot P}. \qquad (3.4)$$

> Матрица P называется ***матрицей перехода*** от старого базиса к новому. Она состоит из расположенных ***по столбцам координат элементов нового базиса*** в старом базисе.

Установим связь между координатами элемента X в старом и новом базисах. Запишем разложение элемента X в старом и новом базисах:

$$X = x_1 E_1 + ... + x_n E_n, \quad X = x'_1 E'_1 + ... + x'_n E'_n .$$

Эти равенства перепишем в матричном виде и во втором из них воспользуемся формулой (3.4):

$$X = (E_1 ... E_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}, \ X = (E'_1 ... E'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix} = (E_1 ... E_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

В силу единственности разложения элемента X по базису $E_1 ... E_n$ получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix}. \text{ Тогда } P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Итак, с помощью матрицы перехода P мы получили следующую ***связь между координатами элемента*** X ***в старом и новом базисах:***

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}}. \qquad (3.5)$$

Пример 3.12. В базисе E_1, E_2, E_3 задан вектор $X = 2E_1 - E_2 + 5E_3$. Найти координаты вектора X в базисе $E'_1 = E_1,\ E'_2 = E_1 + E_2,\ E'_3 = E_1 + E_3$.

Решение. В базисе E_1, E_2, E_3 векторы X, E'_1, E'_2, E'_3 имеют координаты $X = (2, -1, 5)$, $E'_1 = (1, 0, 0)$, $E'_2 = (1, 1, 0)$, $E'_3 = (1, 0, 1)$. Записывая координаты векторов E'_1, E'_2, E'_3 в столбцы, получим матрицу перехода P от базиса E_1, E_2, E_3 к базису E'_1, E'_2, E'_3 : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу:

$$\left(P \mid E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A_1-A_2-A_3\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(E\,\middle|\,P^{-1}\right).$$

Таким образом, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Теперь координаты вектора X в новом базисе найдем по формуле **(**3.5**)**: $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\end{pmatrix}$.

Укажем и другой способ решения этого примера. Выразим векторы нового базиса через векторы старого базиса (в данном примере это сделать легко; в других примерах этот способ может вызвать затруднения):

$$E_1=E_1',\quad E_2=E_2'-E_1=E_2'-E_1',\quad E_3=E_3'-E_1=E_3'-E_1'\ .$$

Тогда вектор X примет вид:

$$X=2E_1-E_2+5E_3=2E_1'-(E_2'-E_1')+5(E_3'-E_1')=-2E_1'-E_2'+5E_3^{1}.$$

Получили разложение вектора X в базисе E_1', E_2', E_3' .

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти матрицу перехода от старого базиса E_1, E_2, E_3 к новому базису E_2, E_3, E_1. Найти координаты вектора X в новом базисе, если в старом базисе вектор X имел координаты $(5,-3,1)$.

2. Вектор X в базисе E_1, E_2, E_3 имеет координаты $(-1,2,0)$. Найти матрицу перехода от базиса E_1, E_2, E_3 к базису $E_1'=2E_1-E_2+3E_3$, $E_2'=-3E_1+E_2-2E_3$, $E_3'=4E_2+5E_3$. Найти координаты вектора X в базисе E_1', E_2', E_3' .

***Ответы*:** 1. $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; $X=(-3,1,5)$; 2. $P=\begin{pmatrix}2&-3&0\\-1&1&4\\3&-2&5\end{pmatrix}$; $X=-0{,}68E_1'-0{,}12E_2'+0{,}36E_3'$.

4. Евклидово пространство

Понятие скалярного произведения можно ввести не только для геометрических векторов, но и для элементов линейного пространства. Тогда получим так называемое евклидово пространство.

Определение. Действительное линейное пространство называется ***евклидовым***, если для любых его элементов X и Y определено ***скалярное произведение***, т.е. действительное число, обозначаемое (X,Y) и удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $(X,Y)=(Y,X)$,

2) $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$,

3) $(X+Y,Z)=(X,Z)+(Y,Z)$,

4) $(X,X)\geq 0$, $(X,X)=0\Leftrightarrow X=\theta$.

Используя свойства 1) − 3), нетрудно доказать дополнительные свойства:

$$(X,\lambda Y)=\lambda(X,Y),\quad (X,Y+Z)=(X,Y)+(X,Z).$$

Действительно, $(X,\lambda Y)=(\lambda Y,X)=\lambda(Y,X)=\lambda(X,Y)$,

$$(X,Y+Z)=(Y+Z,X)=(Y,X)+(Z,X)=(X,Y)+(X,Z).$$

Пример 4.1. В пространстве геометрических векторов скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вводится следующим образом: $(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\vec{x},\vec{y})$. Это скалярное произведение удовлетворяет свойствам 1) − 4).

Пример 4.2. В пространстве R_n n-мерных векторов скалярное произведение векторов $A=(a_1,a_2,...,a_n)$, $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ можно определить следующим образом:

$$(A,B)=a_1 b_1+a_2 b_2+...+a_n b_n.$$

Нетрудно проверить, что оно удовлетворяет свойствам 1) − 4).

Пример 4.3. В пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, скалярное произведение двух функций $f(t)$ и $g(t)$ можно определить следующим образом: $(f,g)=\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt$. Нетрудно проверить, что оно удовлетворяет свойствам 1) − 4).

С помощью скалярного произведения введем понятие ***длины*** элемента X:

$$|X|=\sqrt{(X,X)}.$$

Покажем, что для элементов евклидова пространства так же, как и для геометрических векторов, справедливо ***неравенство Коши-Буняковского***:

$$|(X,Y)|\le|X|\cdot|Y|.$$

Для этого рассмотрим скалярное произведение элемента $X+t\cdot Y$ на себя и воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$0\le(X+t\cdot Y,X+t\cdot Y)=(X,X)+2t\cdot(X,Y)+t^2\cdot(Y,Y).$$

Получили неотрицательный квадратный трехчлен относительно t. Следовательно, его дискриминант $D\le 0$, т.е. $D=4\,(X,Y)^2-4\,(Y,Y)\cdot(X,X)\le 0$. Отсюда

$$(X,Y)^2\le|X|^2\cdot|Y|^2 \quad\text{и}\quad |(X,Y)|\le|X|\cdot|Y|.$$

В евклидовом пространстве из всех базисов наиболее удобным является ***ортогональный базис,*** т.е. базис, состоящий из попарно ортогональных элементов. Отметим, что два элемента X,Y называются ортогональными, если их скалярное произведение (X,Y) равно нулю. Если элементы ***ортогонального*** базиса имеют ***длины, равные единице***, то ***базис*** называется ***ортонормированным.***

Полезным является следующий факт: система ортогональных ненулевых элементов $X_1,X_2,...,X_n$ является линейно независимой системой. Действительно, пусть $c_1X_1+c_2X_2+...+c_nX_n=\theta$. Умножим это равенство скалярно на X_1:

$$c_1(X_1,X_1)+c_2(X_2,X_1)+...+c_n(X_n,X_1)=\theta$$

или $c_1(X_1,X_1)=0$, так как $(X_2,X_1)=0$,..., $(X_n,X_1)=0$ из условия ортогональности системы $X_1,X_2,...,X_n$. Из равенства $c_1(X_1,X_1)=0$ для $X_1\ne 0$ следует, что $c_1=0$. Аналогично, умножая последовательно исходное равенство на $X_2,...,X_n$, получим $c_2 = 0, ..., c_n = 0$. Следовательно, равенство $c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n = \theta$ выполняется только при $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, что и означает линейную независимость системы $X_1, X_2, ..., X_n$.

Пример 4.4. Пусть в пространстве R_n скалярное произведение векторов определено так, как указано в примере 4.2. Доказать, что векторы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \; E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис в пространстве R_n.

Решение. В примере 3.9 было показано, что векторы $E_1, E_2, ..., E_n$ образуют базис в пространстве R_n. Проверим, что векторы $E_1, E_2, ..., E_n$ − ортогональны:

$$(E_1, E_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + ... + 0 \cdot 0 = 0; \text{ аналогично } (E_i, E_k) = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Найдем длину вектора E_1: $\left| E_1 \right| = \sqrt{(E_1, E_1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + ... + 0 \cdot 0} = 1$.

Аналогично, длины остальных векторов также равны 1. Следовательно, векторы $E_1, E_2, ..., E_n$ образуют ортонормированный базис.

Примеры для самостоятельного решения

В евклидовом пространстве R_4, рассмотренном в примере 4.2, установить, образуют ли указанные системы векторов ортогональный базис:

а) $(2,0,0,0), \quad (0,3,0,0), \quad (0,0,0,5)$; б) $(2,0,0,0), \quad (0,3,0,0), \quad (0,0,0,5), \quad (0,0,-1,0)$;

в) $(-1,2,0,0), \quad (2,-1,1,1), \quad (-2,-1,3,0), \quad (0,1,1,1)$;

г) (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, -1/2, -1/2), (1/2, -1/2, 1/2, -1/2), (1/2, -1/2, -1/2, 1/2).

Указать, в каком случае базис будет ортонормированным.

Ответ: а) нет, б) да, в) нет, г) да. В случае г) базис – ортонормированный.

5. Линейные операторы

5.1. Понятие линейного оператора

Пусть L_1, L_2 − линейные пространства.

Определение 1. Правило, по которому каждому элементу X из пространства L_1 ставится в соответствие элемент Y из пространства L_2, называют оператором $\hat{A}$, действующим из пространства L_1 в пространство L_2. При этом записывают $\hat{A}(X) = Y$ и называют Y образом элемента X, а X − прообразом элемента Y.

Определение 2. Оператор $\hat{A}$ называют ***линейным*** на L_1, если

1) $\hat{A}(\lambda X) = \lambda \hat{A}(X)$ для любого элемента X из L_1 и любого числа λ,

2) $\hat{A}(X_1 + X_2) = \hat{A}(X_1) + \hat{A}(X_2)$ для любых элементов X_1, X_2 из пространства L_1.

Эти два равенства можно объединить в одно:

$$\hat{A}\left(\lambda X_1+\mu X_2\right)=\lambda\hat{A}\left(X_1\right)+\mu\hat{A}\left(X_2\right).$$

Нетрудно показать справедливость и более общего утверждения:

$$\hat{A}\left(\lambda_1 X_1+\ldots+\lambda_n X_n\right)=\lambda_1\hat{A}\left(X_1\right)+\ldots+\lambda_n\hat{A}\left(X_n\right).$$

Пример 5.1. Пусть A − матрица размером $n\times n$, X − вектор−столбец из пространства R_n. Оператор $\hat{A}$ определен следующим образом: $\hat{A}\left(X\right)=A\cdot X$. Используя это определение и свойства умножения матриц, имеем:

$$\hat{A}\left(\lambda X_1+\mu X_2\right)=A\cdot\left(\lambda X_1+\mu X_2\right)=\lambda\left(A\cdot X_1\right)+\mu\left(A\cdot X_2\right)=\lambda\cdot\hat{A}\left(X_1\right)+\mu\cdot\hat{A}\left(X_2\right).$$

Значит, оператор $\hat{A}$ является линейным оператором, действующим из R_n в R_n.

Пример 5.2. Пусть оператор $\hat{A}$ определен следующим образом: каждому вектору $X=(x_1,\,x_2)$ он ставит в соответствие вектор $Y=(3,\,x_2)$. Этот оператор не является линейным. Действительно, образом вектора $\lambda X=(\lambda x_1,\,\lambda x_2)$ является вектор $\hat{A}\left(\lambda X\right)=\left(3,\,\lambda x_2\right)$; в то же время $\lambda\hat{A}\left(X\right)=\lambda\left(3,\,x_2\right)=\left(3\lambda,\,\lambda x_2\right)$, т.е.

$$\hat{A}(\lambda X)\neq\lambda\hat{A}(X).$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Координаты векторов X и $Y=\hat{A}(X)$ заданы в одном и том же базисе. Выяснить, является ли оператор $\hat{A}$ линейным:

а) $X=(x_1,\,x_2)$, $\hat{A}(X)=(2x_1,\,0)$; б) $X=\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)$, $\hat{A}\left(X\right)=\left(x_3+2,\,x_1,\,x_2\right)$;

в) $X=\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)$, $\hat{A}\left(X\right)=\left(x_2-2x_3,\,x_2+x_1,\,x_1\right)$; г) $X=\left(x_1,\,x_2\right)$, $\hat{A}\left(X\right)=\left(x_1^2,\,x_2^2\right)$.

Ответ: а) да, б) нет, в) да, г) нет.

2. Является ли линейным оператор $\hat{A}$,

а) переводящий вектор X в вектор $X+B$, где B — фиксированный вектор,

б) переводящий вектор X в число (X,B), где B — фиксированный вектор?

Ответ: а) нет, б) да.

3. Является ли линейным в пространстве многочленов степени не выше n оператор $\hat{A}$, переводящий каждый многочлен в его производную? *Ответ:* Да.

5.2. Матрица линейного оператора в фиксированном базисе

Пусть L − линейное n-мерное пространство, $E_1,\,E_2,\ldots,E_n$ − фиксированный базис в L; $\hat{A}$ − линейный оператор, действующий из пространства L в пространство L; X − вектор из пространства L; Y − его образ, т.е. $Y=\hat{A}(X)$.

Разложим вектор X по базису: $X = x_1E_1 + ... + x_n E_n$ и воспользуемся линейностью оператора $\hat{A}$: $Y = \hat{A}(X) = \hat{A}(x_1E_1 + ... + x_nE_n) = x_1 \hat{A}(E_1) + ... + x_n \hat{A}(E_n)$. Запишем это равенство в матричной форме:

$$Y = \hat{A}(X) = \begin{pmatrix} \hat{A}(E_1) ... \hat{A}(E_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Разложим векторы $\hat{A}(E_1), ..., \hat{A}(E_n)$ по базису $E_1, E_2, ..., E_n$:

$$\begin{cases} \hat{A}(E_1) = a_{11} E_1 + ... + a_{n1} E_n, \\ .... \\ \hat{A}(E_n) = a_{1n} E_1 + ... + a_{nn} E_n. \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(E_1) ... \hat{A}(E_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 ... E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} ... a_{1n} \\ .... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(5.2)}$$

Определение. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} ... a_{1n} \\ .... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из ***координат образов базисных векторов*** $\hat{A}(E_1), ..., \hat{A}(E_n)$, записанных ***по столбцам,*** называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $E_1, E_2, ..., E_n$.

Матрица оператора связана с выбором базиса. При изменении базиса изменится и матрица оператора. Можно показать, что матрица A оператора $\hat{A}$ в базисе $E_1, ..., E_n$ и матрица A' этого же оператора $\hat{A}$ в другом базисе $E_1', ..., E_n'$ связаны формулой

$$\boxed{A' = P^{-1} \cdot A \cdot P}, \qquad \textbf{(5.3)}$$

где P − матрица перехода от базиса $E_1, ..., E_n$ к базису $E_1', ..., E_n'$.

Установим связь между координатами образа Y и прообраза X. Из равенств (5.1) и (5.2) имеем:

$Y = (E_1 ... E_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$. С другой стороны, $Y = y_1E_1 + ... + y_nE_n = (E_1 ... E_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ .... \\ y_n \end{pmatrix}$.

Тогда из единственности разложения вектора Y по базису $E_1, E_2, ..., E_n$ следует:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \overline{Y} = A \cdot \overline{X}}, \qquad \textbf{(5.4)}$$

где $\overline{X}, \overline{Y}$ − есть столбцы координат векторов X, Y в базисе $E_1, E_2, ..., E_n$. Полученное равенство (5.4) выражает связь между координатами образа Y и прообраза X; оно является координатной формой записи равенства $Y=\hat{A}(X)$. Отметим, что координаты векторов и матрица оператора A рассматриваются в одном базисе $E_1, E_2, ..., E_n$.

Пример 5.3. Оператор $\hat{A}$ на плоскости XOY отражает векторы относительно прямой $y=x$ и растягивает их в 2 раза. Найти матрицы оператора $\hat{A}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$ и в базисе $\overrightarrow{E_1}=3\,\vec{i}+\vec{j},\ \overrightarrow{E_2}=2\vec{i}+\vec{j}$. Найти образы векторов $\vec{x}=3\vec{i}-\vec{j}$ и $\vec{x}'=2\vec{E}_1+\vec{E}_2$.

Решение. 1). Для отыскания матрицы оператора $\hat{A}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$ надо найти образы $\hat{A}(\vec{i}),\ \hat{A}(\vec{j})$ векторов $\vec{i}, \vec{j}$. Под действием оператора $\hat{A}$ вектор $\vec{i}$ отражается относительно прямой $y=x$ (получаем вектор $\vec{j}$) и растягивается в 2 раза (рис.1), т.е.

$$\hat{A}(\,\vec{i}\,)=2\,\vec{j}=0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}\,.$$

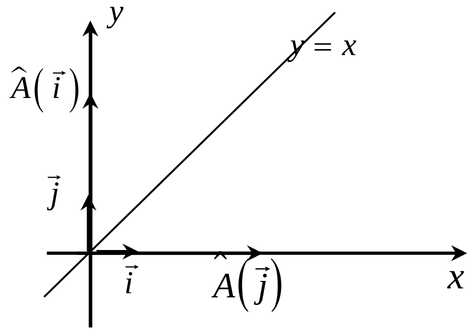

Рис.1

Коэффициенты $(0,\,2)$ разложения вектора $\hat{A}(\vec{i})$ по базису $\vec{i}, \vec{j}$ составят первый столбец матрицы A оператора $\hat{A}$. Аналогично, $\hat{A}(\vec{j})=2\vec{i}=2\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}$. Коэффициенты $(2,\,0)$ составят второй столбец матрицы A оператора $\hat{A}$. Таким образом, в базисе $\vec{i}, \vec{j}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

2). Искомая матрица A' оператора $\hat{A}$ в базисе $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}$ находится по формуле (5.3):

$$A'=P^{-1}\cdot A\cdot P\,,$$

где P − матрица перехода от базиса $\vec{i}, \vec{j}$ к базису $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}$. Матрицу P получим, записывая координаты векторов $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}$ в столбцы: $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу: $P^{-1}=\frac{1}{\det P}\cdot\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Тогда

$$A'=P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -6\\ 16 & 10\end{pmatrix}.$$

3). Найдем образ $\vec{y}$ вектора $\vec{x}=3\vec{i}-\vec{j}$. Запишем связь между координатами вектора $\vec{y}$ и вектора $\vec{x}$, используя равенство (5.4):

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 3-1\cdot 2\\ 2\cdot 3-1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 6\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})=-2\vec{i}+6\vec{j}$. Аналогично найдем образ $\vec{y}'$ вектора $\vec{x}'$:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Оператор $\hat{A}$ на плоскости XOY любой вектор плоскости отражает симметрично относительно оси OX. Найти матрицу A оператора $\hat{A}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$.

2. Найти матрицу A оператора $\hat{A}$, переводящего вектор $X = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $Y = \hat{A}(X) = (x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_3,\ 2x_2 + 5x_3)$, записанный в том же базисе, что и вектор X.

3. Оператор $\hat{A}$ в пространстве многочленов степени не выше третьей переводит каждый многочлен в его производную. Найти матрицу этого оператора в базисе $1, x, x^2, x^3$.

4. В базисе E_1, E_2, E_3 даны вектор $X = 2E_1 + 4E_2 - E_3$ и матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ оператора $\hat{A}$. Найти в этом базисе координаты вектора $\hat{A}(X)$.

Ответы: 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4. $\hat{A}(X) = -4E_1 + 7E_2 + 7E_3$.

5.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Собственные значения и собственные векторы (элементы) линейного оператора имеют разнообразные применения. Они используются для исследования устойчивости систем, для решения задач теплопроводности и диффузии, для исследования кривых и поверхностей второго порядка и т.д.

Определение. Пусть $\hat{A}$ − линейный оператор, действующий в линейном пространстве L. Если $\hat{A}(X) = \lambda X$, где λ − число, $X \neq 0$, то X есть ***собственный элемент*** (собственный вектор) оператора $\hat{A}$, а λ − соответствующее ему ***собственное значение.***

Пример 5.4. В плоскости XOY оператор $\hat{A}$ отражает любой вектор симметрично относительно прямой $y = x$ и растягивает вектор в 2 раза. Найти собственные векторы и собственные значения оператора.

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{b}$, лежащий на прямой $y = x$. При отражении относительно этой прямой вектор $\vec{b}$ остается неизменным и затем растягивается в 2 раза, т.е. $\hat{A}(\vec{b}) = 2\vec{b}$. Значит, $\vec{b}$ − собственный вектор оператора $\hat{A}$, $\lambda = 2$ его собственное значение. Рассмотрим вектор $\vec{c}$, перпендикулярный прямой $y = x$. При отражении относи-

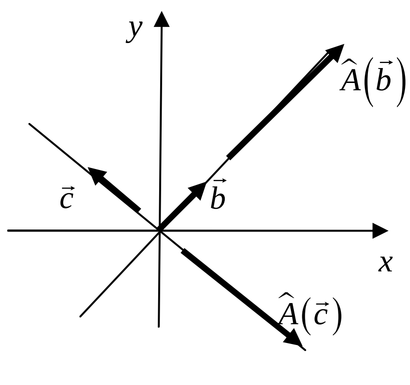

Рис.2

тельно прямой $y = x$ вектор $\vec{c}$ заменится на -$\vec{c}$, затем растянется в 2 раза, т.е. $\hat{A}(\vec{c}) = -2\,\vec{c}$. Значит, $\vec{c}$ – также собственный вектор оператора, $\lambda = -2$ его собственное значение.

Рассмотрим способ отыскания собственных векторов и собственных значений оператора $\hat{A}$ в n–мерном пространстве. Пусть A есть матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $E_1, \ldots, E_n$, $\overline{X}$ – столбец координат вектора X в том же базисе, E – единичная матрица. Запишем равенство $\hat{A}(X) = \lambda X$, определяющее собственный вектор X, в координатной форме: $A \cdot \overline{X} = \lambda\,\overline{X}$ или $A \cdot \overline{X} = \lambda\, E \cdot \overline{X}$. Перенесем $\lambda E \cdot \overline{X}$ в левую часть и вынесем $\overline{X}$ за скобки: $(A - \lambda E) \cdot \overline{X} = \theta$. Это есть однородная система линейных уравнений, записанная в матричной форме. Она имеет ненулевое решение $\overline{X}$ тогда и только тогда, когда определитель системы $\det(A - \lambda E)$ равен нулю. Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ служит для отыскания собственных значений λ; его называют характеристическим уравнением.

Таким образом, для отыскания собственных векторов $\overline{X}$ и собственных значений λ оператора $\hat{A}$ с матрицей A следует:

1) найти числа λ из уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$,

2) подставить найденные значения λ в матричное уравнение $(A - \lambda E) \cdot \overline{X} = \theta$ и найти ненулевые решения $\overline{X}$.

Можно доказать, что при переходе к другому базису характеристическое уравнение, а значит, и собственные значения λ не меняются.

Пример 5.5. Найти собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. 1). Найдем собственные значения из уравнения $|A - \lambda E| = 0$:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(-\lambda) = 0\,.$$

Из этого уравнения получим три собственных значения: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$.

2). Найдем собственный вектор $\overline{X}$ для собственного значения $\lambda_1 = 0$ из уравнения $(A - \lambda_1 E)\overline{X} = \theta$. Запишем это уравнение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Имеем 2 уравнения с 3 неизвестными. Зафиксируем одно неизвестное x_3, положив $x_3 = c$. Тогда $x_1 = -2c,\ x_2 = 0$. Мы получили множество собственных векторов $\overline{X}=\begin{pmatrix}-2c\\0\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, отличающихся постоянным множителем c (т.е. коллинеарных друг другу).

3). Найдем собственный вектор $\overline{Y}$ для собственного значения $\lambda_2=1$ из уравнения $\left(A-\lambda_2 E\right)\cdot\overline{Y}=\theta$. Запишем это уравнение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}2y_3=0,\\2y_2=0,\\-y_3=0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\overline{Y}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

4). Аналогично найдем собственный вектор $\overline{Z}=c\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ для собственного значения $\lambda_3=3$ из уравнения $(A-\lambda_3 E)\cdot\overline{Z}=\theta$.

Нетрудно проверить, что собственные векторы $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ линейно независимы.

Можно доказать, что те свойства собственных векторов, которые мы обнаружили в конкретном примере, имеют место и в общем случае. Сформулируем эти свойства:

1) если X − собственный вектор линейного оператора $\hat{A}$, соответствующий собственному значению λ, то вектор cX, где c − любое ненулевое число, также является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ;
2) собственные векторы оператора $\hat{A}$, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы;
3) оператор $\hat{A}$ в базисе из своих собственных векторов $X_1, X_2, ..., X_n$ (если этот базис существует) имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \; ... \; 0\\ 0 & \lambda_2 \; ... \; 0\\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 \; ... \; \lambda_n\end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ − собственные значения, соответствующие собственным векторам $X_1, X_2, ..., X_n$.

Поясним эти свойства.

1). Пусть X − собственный вектор с собственным значением λ. Тогда, в силу линейности оператора $\hat{A}$, имеем $\hat{A}(cX)=c\cdot\hat{A}(X)=c\cdot\lambda X=\lambda(cX)$. Следовательно, вектор cX является собственным вектором оператора $\hat{A}$ с собственным значением λ.

2). Для простоты ограничимся двумя собственными векторами X_1, X_2 с собственными значениями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1\neq\lambda_2$). Предположим, что X_1 и X_2 − линейно зависимы. Тогда один из этих векторов выражается через другой, например, $X_1=cX_2$. Но вектор cX_2 − собственный вектор с собственным значением λ_2, а

X_1 − собственный вектор с собственным значением λ_1. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$, что противоречит условию.

3). Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ − базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$. Тогда $\hat{A}(X_1) = \lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_1 + 0 \cdot X_2 + ... + 0 \cdot X_n$; коэффициенты разложения $\lambda_1, 0, ..., 0$ образуют первый столбец матрицы оператора $\hat{A}$ в базисе $X_1, X_2, ..., X_n$. Аналогично $\hat{A}(X_2) = \lambda_2 X_2 = 0 \cdot X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + 0 \cdot X_n$; коэффициенты разложения $0, \lambda_2, 0, ..., 0$ образуют второй столбец матрицы оператора $\hat{A}$ в базисе $X_1, X_2, ..., X_n$ и т.д.

В евклидовом пространстве особо важную роль играют операторы, матрица которых в ортонормированном базисе ***симметрична,*** т.е. $A^T = A$; такие операторы называют ***симметричными.*** Они обладают рядом следующих полезных свойств:

1) симметричный оператор $\hat{A}$, действующей в $n-$мерном евклидовом пространстве, имеет n вещественных собственных значений;
2) собственные векторы симметричного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны;
3) существует ортонормированный базис из собственных векторов симметричного оператора $\hat{A}$.

Доказательство этих свойств можно опустить. Эти свойства будут использованы при изучении квадратичных форм.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти собственные векторы и собственные числа λ следующих операторов, действующих на плоскости: а) симметрии относительно оси OX; б) ортогональной проекции вектора на ось OY.

Ответ:

а) любой ненулевой вектор, коллинеарный оси OX, с собственным значением $\lambda = 1$ и любой ненулевой вектор, коллинеарный оси OY, с $\lambda = -1$;

б) ненулевой вектор, коллинеарный оси OX, с $\lambda = 0$ и ненулевой вектор, коллинеарный оси OY, с $\lambda = 1$.

2. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-3$; $\quad X_1=c\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix},\ X_2=c\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

6. Квадратичные формы

Квадратичные формы используются для исследования функций нескольких переменных на экстремум, для исследования кривых и поверхностей 2-го порядка и в ряде других вопросов.

6.1. Определение квадратичной формы. Различные виды ее записи

Определение. Пусть $\hat{A}$ − симметричный оператор, действующий в n−мерном евклидовом пространстве L_n. Функция $F(X)=(X,\hat{A}X)$, определенная на пространстве L_n, называется ***квадратичной формой***, соответствующей оператору $\hat{A}$.

Пусть в фиксированном ортонормированном базисе вектор X имеет координаты $x_1,...,x_n$, вектор $\hat{A}X=Y$ имеет координаты $y_1,...,y_n$. Введем столбцы координат $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\....\\x_n\end{pmatrix}$, $\overline{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\....\\y_n\end{pmatrix}$. Тогда

$$F(X)=(X,\hat{A}X)=(X,Y)=x_1y_1+...+x_ny_n=(x_1...x_n)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\....\\y_n\end{pmatrix}=\overline{X}^T\cdot\overline{Y}.$$

Пусть A − матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $E_1,...,E_n$. Так как $Y=\hat{A}X$, то $\overline{Y}=A\cdot\overline{X}$,

$$\boxed{F(X)=\overline{X}^T\cdot A\cdot\overline{X}}.$$

Получили ***матричную*** запись квадратичной формы в базисе $E_1,...,E_n$. Отметим, что так как оператор $\hat{A}$ − симметричный, то его ***матрица*** A ***− симметричная.***

Наряду с матричной записью квадратичной формы используют еще и координатную запись. Для простоты ограничимся двумерным случаем. Тогда

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \overline{X}^T=(x_1\ x_2),\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\\a_{21}\ a_{22}\end{pmatrix},$$

$$F(X)=\overline{X}^T\cdot A\cdot\overline{X}=(x_1\ x_2)\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1\ x_2)\cdot\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}=$$

$$=a_1x_1x_1+a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_1=\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}x_ix_k.$$

Так как матрица A является симметричной, то $a_{21}=a_{12}$. Поэтому

$$\boxed{F(X)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2}.$$

Это есть ***координатная запись*** квадратичной формы в двумерном пространстве. Аналогично в $n-$мерном пространстве ***координатная запись*** квадратичной формы имеет вид:

$$\boxed{F(X)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\,x_k\,, \text{ где } \ a_{ik}=a_{ki}\,.}$$

Пример 6.1. Найти матрицу квадратичной формы

$$F(X)=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3\,.$$

Решение. В квадратичной форме коэффициент при x_1x_1 равен $a_{11}=11$, коэффициент при x_2x_2 равен $a_{22}=5$, коэффициент при x_3x_3 равен $a_{33}=2$. Учитывая, что $a_{12}=a_{21}$ и $a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1=2a_{12}x_1x_2$, имеем $2a_{12}=16$ и $a_{12}=8$. Аналогично, коэффициент при x_1x_3 равен $2a_{13}=4$ и $a_{13}=2$; коэффициент при x_2x_3 равен $2a_{23}=-20$ и $a_{23}=-10$. Тогда матрица квадратичной формы имеет вид: $A=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти матрицу A квадратичной формы:

а) $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$, б) $F(x,y,z)=2x^2+3y^2-z^2+4xy-6xz+10yz$,

в) $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1^2+x_3^2-2x_4^2-x_1x_2+8x_1x_4-5x_2x_4$.

Ответ: а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1/2 & 0 & 4 \\ -1/2 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5/2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Записать квадратичную форму в координатном виде:

а) $F(x_1,x_2)=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, б) $F(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $F(x_1,\,x_2)=x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2$, б) $F(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+4x_1x_3+4x_2^2+6x_2x_3-x_3^2$.

6.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть в данном ортонормированном базисе квадратичная форма $F(X)=(X,\hat{A}X)$ имеет вид: $F(X)=X^T\cdot A\cdot X=\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$. Так как $\hat{A}$ − симметричный оператор, то существует ортонормированный базис из его собственных векторов, назовем его каноническим базисом. В этом базисе матрица A' оператора $\hat{A}$ имеет наиболее простой, диагональный вид: ее элементы $a'_{ii}=\lambda_i$, $a'_{ik}=0$ при $k\neq i$. В ортонормированном базисе из собственных векторов $F(X)=\sum\limits_{i,k=1}^{n} a'_{ik}x'_i\, x'_k$, где ненулевыми будут только слагаемые с индексом $k=i$. Поэтому квадратичная форма примет так называемый ***канонический*** вид:

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n} a'_{ii}\, {x'_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, {x'_i}^2=\lambda_1 {x'_1}^2+\lambda_2 {x'_2}^2+\ldots+\lambda_n {x'_n}^2 .$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы квадратичной формы, $x'_1, x'_2,\ldots,x'_n$ – координаты вектора X в базисе из собственных векторов этой матрицы.

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду следует:

1) записать матрицу квадратичной формы,
2) найти собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ этой матрицы,
3) записать канонический вид формы $F(X)=\lambda_1 {x'_1}^2+\ldots+\lambda_n {x'_n}^2$.

6.3. Исследование уравнений кривых и поверхностей второго порядка

Кривые и поверхности второго порядка описываются уравнением:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k+\sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i=c,$$

где $n=2$ для кривых и $n=3$ для поверхностей. Для исследования и построения этой кривой или поверхности следует:

1) записать матрицу квадратичной формы $A=\left(a_{ik}\right)$;
2) найти собственные значения этой матрицы;
3) найти ортонормированный базис из собственных векторов (канонический базис);
4) записать в каноническом базисе квадратичную форму:
$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, {x'_i}^2=\lambda_1 {x'_1}^2+\lambda_2 {x'_2}^2+\ldots+\lambda_n {x'_n}^2 .$$
5) записать в каноническом базисе линейную форму, используя формулу (3.5):
$$\sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i=\overline{B}^{T}\cdot\overline{X}=\overline{B}^{T}\cdot P\cdot\overline{X}' .$$

Здесь $\overline{B}^T=(b_1, b_2,\ldots,b_n)$ – коэффициенты линейной формы, $\overline{X}^T=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, P – матрица перехода от старого базиса к новому ортонормированному базису из собственных векторов (координаты собственных векторов являются столбцами матрицы P).

Отметим, что если в исходном уравнении нет линейной формы, то для выяснения типа кривой или поверхности собственные векторы можно не искать; для построения кривой же или поверхности собственные векторы придется найти. Они нужны для построения новой системы координат, в которой придется строить кривую или поверхность по их каноническим уравнениям.

Пример 6.2. Исследовать и построить кривую с уравнением:

$$5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0.$$

Решение. 1). Запишем матрицу A квадратичной формы $5x^2+6xy+5y^2$; коэффициент при x^2 равен $a_{11}=5$, коэффициент при xy равен $2a_{12}=6$, т.е. $a_{12}=3$, коэффициент при y^2 равен $a_{22}=5$. Значит, $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$.

2). Найдем собственные значения матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&3\\3&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-9=\lambda^2-10\lambda+16=0.$$

Получим собственные значения $\lambda_1=2,\ \lambda_2=8$.

3). Для $\lambda_1=2$ найдем собственный вектор $e_1=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ из уравнения $\left(A-\lambda_1E\right)\cdot e_1=\theta$ или более подробно

$$\begin{pmatrix}5-\lambda_1&3\\3&5-\lambda_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Получим систему $\begin{cases}3z_1+3z_2=0,\\3z_1+3z_2=0,\end{cases}$ из двух одинаковых уравнений.

Она имеет множество решений и, в частности, $z_1=1,\ z_2=-1$. Тогда $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Аналогично, для $\lambda_2=8$ найдем собственный вектор $e_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Эти собственные векторы, как следует из теории, ортогональны. Поделив векторы e_1 и e_2 на их длины, равные $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, получим ортонормированный базис из собственных векторов (канонический базис):

$$e_1'=\frac{e_1}{|e_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad e_2'=\frac{e_2}{|e_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

4). В этом базисе квадратичная форма $5x^2+6xy+5y^2$ примет вид:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=2x'^2+8y'^2.$$

В линейной форме также перейдем к новым переменным, сделав замену $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, где P − матрица перехода от старого базиса к новому: $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Тогда линейная форма примет следующий вид: $-16x-16y=$

$$=(-16\ \ -16)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(-16\ \ -16)\cdot P\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(-16\ \ -16)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-32\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=-16\sqrt{2}y'.$$

Складывая полученные квадратичную и линейную формы, получим уравнение кривой в новом базисе e_1', e_2': $2x'^2+8y'^2-16\sqrt{2}y'-16=0$.

Дополним члены, содержащие y', до полного квадрата:

$$2x'^2+8\left(y'^2-2\sqrt{2}y'+(\sqrt{2})^2\right)-8\left(\sqrt{2}\right)^2-16=0,$$

$$2x'^2+8\left(y'-\sqrt{2}\right)^2=32 \quad \text{и} \quad \frac{x'^2}{16}+\frac{\left(y'-\sqrt{2}\right)^2}{4}=1.$$

В новой системе координат получили уравнение эллипса с центром в точке $(0,\sqrt{2})$ и полуосями $a=4,\ b=2$.

5). Построим новый базис $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и соответствующие новые оси координат OX', OY' (рис. 3). В новой системе координат построим центр, оси эллипса и сам эллипс.

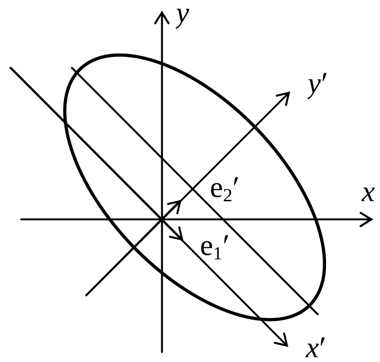

Рис.3

Пример 6.3. Какую поверхность определяет уравнение

$$11x^2+5y^2+2z^2+16xy+4xz-20yz=0\ ?$$

Решение. 1). В левой части уравнения имеем квадратичную форму. Ее матрицу мы нашли в примере 6.1: $A=\begin{pmatrix}11 & 8 & 2\\ 8 & 5 & -10\\ 2 & -10 & 2\end{pmatrix}$.

2). Найдем ее собственные значения из уравнения $|A-\lambda E|=0$:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}11-\lambda & 8 & 2\\ 8 & 5-\lambda & -10\\ 2 & -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(11-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}5-\lambda & -10\\ -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}-8\cdot\begin{vmatrix}8 & -10\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}8 & 5-\lambda\\ 2 & -10\end{vmatrix}=$$

$$=(11-\lambda)\cdot\left[(5-\lambda)\cdot(2-\lambda)-100\right]-8\cdot\left[8\cdot(2-\lambda)+20\right]+2\cdot\left[-80-2\cdot(5-\lambda)\right]=$$

$$=-\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-18\cdot 81=-\lambda^2(\lambda-18)+81(\lambda-18)=(\lambda-18)\cdot\left(81-\lambda^2\right)=0.$$

Получаем собственные значения $\lambda_1=18,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=-9$.

3). Каноническое уравнение поверхности будет иметь вид:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2=0 \quad \text{или} \quad 18x'^2+9y'^2-9z'^2=0 \quad \text{или} \quad 2x'^2+y'^2=z'^2.$$

Это уравнение определяет эллиптический конус. Если мы захотим построить этот конус, то придется найти еще и ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A.

7. Системы дифференциальных уравнений

7.1. Основные понятия. Сведение к одному уравнению

Система уравнений, связывающих независимую переменную t, искомые функции $x_1(t),\ x_2(t),\ldots,\ x_n(t)$ и их производные, называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Совокупность функций $x_1(t),\ x_2(t),\ldots,\ x_n(t)$ называют решением системы, если эти функции обращают каждое уравнение системы в тождество.

Для решения системы дифференциальных уравнений иногда полезно свести систему к одному дифференциальному уравнению, но более высокого порядка. Продемонстрируем этот метод на примерах.

Пример 7.1. Найти решения $y(x),\ z(x)$ системы уравнений: $\begin{cases} y'' = z\,, \\ z'' = y\,. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение продифференцируем дважды по x: $y^{(4)} = z''$ и из второго уравнения подставим $z'' = y$. Получим однородное линейное дифференциальное уравнение $y^{(4)} = y$ с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ или $\left(k^2 - 1\right)\cdot\left(k^2 + 1\right) = 0.$ Корни этого уравнения $k = \pm 1,\ k = \pm\, i$, поэтому $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$. Так как $z = y''$, то $z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$.

Пример 7.2. Найти решение $y(x),\ z(x)$ системы уравнений $\begin{cases} y' = y + z + x, \\ z' = -4y - 3z + 2x. \end{cases}$

Решение. Продифференцируем первое уравнение по x: $y'' = y' + z' + 1$. Исключим z из этого уравнения. Для этого подставим выражение для z' из второго уравнения исходной системы, а выражение для z из первого уравнения:

$$y'' = y' + \left(-4y - 3z + 2x\right) + 1 = y' - 4y - 3\left(y' - y - x\right) + 2x + 1 = -2y' - y + 5x + 1.$$

Получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение (НЛДУ) с постоянными коэффициентами $y'' + 2y' + y = 5x + 1.$

Сначала решим соответствующее однородное уравнение (ОЛДУ): его характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -1$, поэтому общее решение ОЛДУ имеет вид: $Y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. Частное решение НЛДУ будем искать в виде $\tilde{y} = ax + b$. Подставляя его в НЛДУ, получим $2a + ax + b = 5x + 1$, откуда

$$a = 5,\ b = -9,\ \tilde{y} = 5x - 9,\ y = Y + \tilde{y} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9\,.$$

Из первого уравнения найдем z:

$$z = y' - y - x = \left(-c_1 e^{-x} + c_2\, e^{-x} - c_2 x e^{-x} + 5\right) - \left(c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9\right) - x.$$

Итак, решение системы: $y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) + 5x - 9, \quad z = e^{-x}\left(-2c_1 + c_2 - 2c_2 x\right) - 6x + 14.$

Порядком системы дифференциальных уравнений назовем сумму порядков, входящих в нее уравнений. Так, в примере 7.1 имеем систему 4-го порядка; общее решение этой системы содержит 4 произвольные постоянные. Для их отыскания нужно задать 4 начальных условия:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ z(x_0) = z_0,\ z'(x_0) = z_1\,.$$

В примере 7.2 имеем систему 2-го порядка; общее решение этой системы содержит 2 произвольные постоянные. Для их отыскания нужно задать 2 начальных условия: $y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0..$

7.2. Однородная линейная система

Рассмотрим систему n-го порядка из n однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \text{ или в матричной форме } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (7.1)$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ — заданные функции аргумента t; составленную из них матрицу обозначим A; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — искомые функции аргумента t; вектор-столбец, составленный из этих функций, обозначим $X(t)$, а вектор-столбец, составленный из производных этих функций, обозначим $X'(t)$. Тогда систему (7.1) можно записать в виде

$$X'(t) = A \cdot X(t). \qquad (7.2)$$

Для системы однородных линейных дифференциальных уравнений, так же как и для одного такого уравнения, справедливы следующие теоремы, которые приводим без доказательства.

Теорема 7.1. Пусть $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ — ***линейно независимые*** решения однородной линейной системы (7.2) порядка n. Тогда их линейная комбинация

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \ldots + c_n X_n(t)$$

является ***общим решением*** этой системы.

Теорема 7.2. Пусть однородная линейная система (7.2) ***с действительной матрицей*** A имеет комплексное решение $X = U + i\,V$. Тогда его действительная часть U и мнимая часть V также являются решениями этой системы.

Систему (7.1) можно решить рассмотренным ранее способом сведения к одному уравнению $n-$го порядка. В случае ***постоянных коэффициентов*** $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ рассмотрим метод решения системы, позволяющий далее анализировать устойчивость решения.

Будем искать решение однородной линейной системы (7.2) с постоянной матрицей A в виде $X = B \cdot e^{\lambda t}$, где B есть n-мерный вектор с постоянными координатами. Подставив $X = B \cdot e^{\lambda t}$ в уравнение (7.2), получим:

$$B \cdot \lambda e^{\lambda t} = A \cdot B e^{\lambda t} \text{ или } A \cdot B = \lambda B.$$

Это означает, что B есть собственный вектор, а λ есть соответствующее собственное значение матрицы A.

Напомним, что собственные значения λ матрицы A отыскиваются из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, которое является алгебраическим уравнением $n-$го порядка и имеет n корней, действительных или комплексных. Собственные векторы B отыскиваются из уравнения $(A - \lambda E) \cdot B = 0$.

Возможны следующие случаи.

1). Корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ действительны и различны.

Тогда соответствующие собственные векторы $B_1, B_2, ..., B_n$ линейно независимы и функции $X_1 = B_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$, $X_2 = B_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$, ... , $X_n = B_n \cdot e^{\lambda_n t}$ являются линейно независимыми решениями системы (7.2). Общее решение системы будет иметь вид:

$$X = c_1 \cdot B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot B_2 e^{\lambda_2 t} + c_n \cdot B_n e^{\lambda_n t} .$$

2). Среди корней характеристического уравнения есть комплексные.

Пусть, например, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тогда $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Соответствующие им собственные векторы $B_1 + iB_2$, $B_1 - iB_2$ и соответствующие решения системы $\left(B_1 \pm iB_2\right) \cdot e^{(\alpha \pm i\beta)t} = U(t) \pm i\,V(t)$. Тогда $U(t)$, $V(t)$ в силу теоремы (7.2) также будут решениями системы. Можно показать, что эти решения будут линейно независимыми.

3). Среди корней характеристического уравнения есть равные.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$ **,** то соответствующее этим корням решение следует искать в виде $X = \left(B_1 + B_2 t + ... + B_k t^{k-1}\right) \cdot e^{\lambda_1 t}$. Векторы $B_1, B_2, ..., B_k$ отыскиваются путем подстановки данного X в систему уравнений и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t.

Пример 7.3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 5y. \end{cases}$

Решение. Имеем систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения и собственные векторы найдены в примере 6.2:

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 8, \ B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$X = c_1 \cdot B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot B_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \ \ c_1 e^{2t} + c_2 e^{8t}, \\ y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{8t}. \end{cases}$$

Пример 7.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

Решение. Имеем систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

а). Найдем собственные значения матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) + 10 = \left(\lambda^2 - 1\right) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0.$$

Получим комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$.

б). Для $\lambda_1 = 3\,i$ найдем собственный вектор $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ из уравнения $\left(A - \lambda_1 E\right) \cdot B_1 = \theta$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -5 \\ 2 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} (1-3i)b_1 - 5b_2 = 0 \\ 2b_1 - (1+3i)b_2 = 0 \end{cases}.$$

Получили систему из двух уравнений. Так как определитель системы равен нулю, то достаточно рассмотреть одно из уравнений, например первое, и выбрать одно из множества решений, в частности, $b_1 = 5,\ b_2 = 1 - 3\,i$. Тогда $B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3\,i \end{pmatrix}$.

в). Запишем решение $X_1 = B_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$ и, учитывая, что $e^{3i\,t} = \cos 3t + i \sin 3t$, выделим действительную и мнимую части решения:

$$X_1 = B_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} \cdot \left(\cos 3t + i \sin 3t\right) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 7.2 действительная часть и мнимая часть решения X_1, т.е.

$$U = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix},$$

являются решениями системы и, как отмечалось, эти решения будут линейно независимы. Поэтому общее решение системы будет иметь вид:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t, \\ y = c_1\left(\cos 3t + 3\sin 3t\right) + c_2\left(\sin 3t - 3\cos 3t\right). \end{cases}$$

Заметим, что для $\lambda_2 = -3i$ искать собственный вектор B_2 и решение X_2 не нужно, так как решение $X_2 = U - iV$ приводит к тем же действительным решениям U и V, что и ранее.

Пример 7.5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x'_t = -2x + 3y, \\ y'_t = -3x + 4y. \end{cases}$

Решение. Имеем систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

а). Найдем собственные значения матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(\lambda - 4) + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Получим равные собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

б). Запишем решение в виде $X = \left(Bt + D\right) \cdot e^{\lambda t}$ и подставим в уравнение $\dfrac{dX}{dt} = A \cdot X$:

$$B \cdot e^{\lambda t} + \left(Bt + D\right) \cdot \lambda e^{\lambda t} = A \cdot \left(Bt + D\right) e^{\lambda t}.$$

Сократим это равенство на $e^{\lambda t}$ и сравним коэффициенты при t и t^0:

$$\begin{cases} A\cdot B=\lambda B, \\ A\cdot D=\lambda D+B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (A-\lambda E)\cdot B=0, \\ (A-\lambda E)\cdot D=B. \end{cases}$$

При $\lambda=1$ первое равенство примет вид: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $-3b_1+3b_2=0$, откуда $b_1=b_2$, второе равенство примет вид: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, или $-3d_1+3d_2=b_1$, $d_2=\frac{b_1}{3}+d_1$. Поэтому

$$X=(Bt+D)\cdot e^{\lambda t}=\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\cdot t+\begin{pmatrix} d_1 \\ d_1+\frac{b_1}{3} \end{pmatrix}\right]\cdot e^t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=(b_1t+d_1)\cdot e^t, \\ y=\left(b_1t+d_1+\frac{b_1}{3}\right)\cdot e^t. \end{cases}$$

7.3. Понятие об устойчивости решения

Устойчивость движения имеет важное значение: ракета при своем движении должна устойчиво сохранять курс; турбины, генераторы должны устойчиво соблюдать заданный режим работы и т.д.

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений $\frac{dX}{dt}=F(X,t)$ с начальными условиями $X(t_0)=X_0$, где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$.

Начальные условия обычно являются результатом измерения и известны с некоторой погрешностью. Важен случай, когда малое изменение начальных данных влечет малое изменение решения, т.е. решение является устойчивым.

Определения. 1). Решение $X(t)$ системы $\frac{dX}{dt}=F(X,t)$ называется ***устойчивым*** по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всякого решения $\tilde{X}(t)$ той же системы из неравенства $\left|\tilde{X}(t_0)-X(t_0)\right|<\delta$ следует неравенство $\left|\tilde{X}(t)-X(t)\right|<\varepsilon$ для всех $t\ge t_0$.

2). Если дополнительно $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\tilde{X}(t)-X(t)\right|=0$, то решение $X(t)$ называется ***асимптотически устойчивым.***

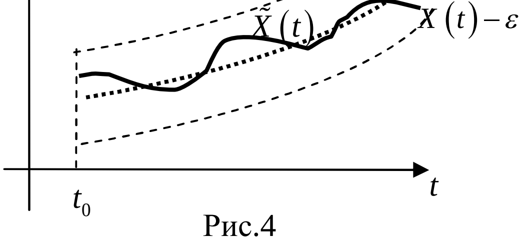

Рис.4

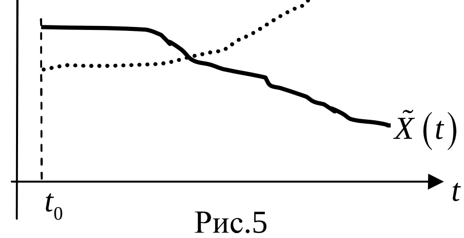

Рис.5

На рис.4 решение является устойчивым, но не асимптотически. На рис.5 решение является неустойчивым.

Пример 7.6. Исследовать на устойчивость решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k = const).$$

Решение. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dx}{x} = k \cdot dt, \quad \ln x = k \cdot t + \ln c, \quad x = c \cdot e^{kt}.$$

Пусть $x(t)$ – решение уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Тогда $x(t_0) = x_0 = c \cdot e^{kt_0}$, $c = x_0 \cdot e^{-kt_0}$ и решение $x(t) = x_0 \cdot e^{-kt_0} \cdot e^{kt} = x_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$.

Пусть $\tilde{x}(t)$ – решение уравнения с другим начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$. Тогда решение $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$. Оценим близость этих решений

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot e^{k(t-t_0)}.$$

Рассмотрим несколько случаев:

а) если $k > 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot \lim\limits_{t\to+\infty} e^{k(t-t_0)} = \infty$ и решение $x(t)$ является неустойчивым;

б) если $k < 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot \lim\limits_{t\to+\infty} e^{k(t-t_0)} = 0$ и решение $x(t)$ является асимптотически устойчивым;

в) если $k = 0$, то $|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot e^{k(t-t_0)} = |\tilde{x}_0 - x_0|$ и решение $x(t)$ является устойчивым, так как малому отклонению $|\tilde{x}_0 - x_0|$ решений в начальный момент t_0 соответствует малое отклонение решений в любой момент времени $t > t_0$;

но при этом $\lim\limits_{t\to+\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \neq 0$, поэтому решение $x(t)$ не является асимптотически устойчивым.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$ или в матричной форме $X'(t) = A \cdot X(t) + F(t)$.

Приведем без доказательства следующую важную теорему.

Теорема 7.3. Пусть дана система $X'(t) = A \cdot X(t) + F(t)$, где A – матрица порядка $n \times n$ с действительными постоянными коэффициентами и λ_k – собственные значения матрицы A $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

а) если все собственные значения матрицы A имеют ***отрицательные*** действительные части, то любое решение системы ***асимптотически устойчиво***,

б) если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет ***положительную*** действительную часть, то любое решение системы ***неустойчиво***.

Пример 7.7. Исследовать на устойчивость решение системы $\begin{cases} x'_t = 11x + 8y + 2z, \\ y'_t = 8x + 5y - 10z, \\ z'_t = 2x - 10y + 2z. \end{cases}$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения были найдены в примере 6.3: $\lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = -9$. Так как $\operatorname{Re}\lambda_1 = \lambda_1 = 18 > 0$, то любое решение системы неустойчиво.

Пример 7.8. Исследовать на устойчивость решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 3y. \end{cases}$

Решение. Найдем собственные значения матрицы системы:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0; \quad \lambda = -1 \pm 2i.$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -1 < 0$, то любое решение системы асимптотически устойчиво.

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить систему $\begin{cases} x'_t = 2x - 4y, \\ y'_t = x - 3y + 3e^t, \end{cases}$ сведением к одному уравнению. Исследовать решения на устойчивость.

Ответ: решение $x = 4c_1e^t + c_2e^{-2t} - 4te^t,\ \ y = c_1e^t + c_2e^{-2t} - (t-1)e^t$ — неустойчиво.

2. Решить систему $\begin{cases} x'_t = 2x - y + 2z, \\ y'_t = x + 2z, \\ z'_t = -2x + y - z, \end{cases}$ не сводя к одному уравнению. Исследовать решения на устойчивость.

Ответ: решение $x = c_2\cos t + (c_2 + 2c_3)\sin t,\quad y = 2c_1e^t + c_2\cos t + (c_2 + 2c_3)\sin t,$

$z = c_1e^t + c_3\cos t - (c_2 + c_3)\sin t$ — неустойчиво.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.1. 288 с.; Ч.2. 256 с.
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
3. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Ч.1. 352 с.
4. Высшая математика /под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Высшая школа, 2004. 584 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа /под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука, 1996. 464 с.
6. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов /И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев . М.: Наука, 1980. 946 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк.,1997. Ч.1. 304 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений /Г. С. Бараненков и др.; под ред. Б.П. Демидовича. М.: ООО "Издательство Астрель", 2002. 495 с.

Учебно-методическое издание

Ревекка Максовна Минькова

Линейная алгебра с приложениями

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подисано в печать 17. 06. 2005 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 2. 91
Уч.-изд. л. 2.6 Тираж Заказ Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 17